אלגברה ליניארית

3.11.19

נועם לוי

ncamlevi2@gmail.com

052-8950659 ← להתקשר עדיף. דברים דחופים/ לקבוע. אדמיניסטרטיביות

שעת קבלה - יום ה'

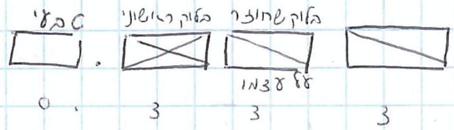
מספרים אנו מכירים ומשתמשים:

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ הטבעיים

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} / n\neq 0,\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ רציונליים

לדוגמא: $0.333\dots = \frac{1}{3}$, $27.02 = \frac{2702}{100}$

או כתבנית:



$\mathbb{R} = \in\{e, \pi, \sqrt{2}\}$ ממשיים

$\mathbb{Z} = \{-3,-2,0,1,2..\}$ שלמים (כל המספרים של הישר)

$\mathbb{C} = \{i=\sqrt{-1}\}$ מס' מרוכבים/ מדומים.

וקטורים (ממימד סופי)

$(a, b, c, d, \dots)$ קורדינטה ראשונה, "שנייה", "שלישית", וכו'

הגדרה: סדרה סופית של מספרים.

למשל: $(5,7,9,2\frac{1}{2})\in\mathbb{R}^4$. ה"4" מעל ה $\mathbb{R}$ זה כי יש 4 מספרים בוקטור

כאשר יש "( )" הסדר משנה לעומת "{ }" בה הוא לא ולכן $(1,2)\neq\{1,2\}$.

פעולות על וקטורים

א) חיבור וחיסור: ניתן לחבר רק על וקטורים מאותו מימד.

לדוגמא: $\underset{\in\mathbb{R}^3}{(2,3,7)} + \underset{\in\mathbb{R}^3}{(-1,1\frac{1}{2},2)} = (2-1, 3+1\frac{1}{2}, 7+2) = \underset{\in\mathbb{R}^3}{(1,4\frac{1}{2},9)}$

$(2,3,7) - (-1,1\frac{1}{2},2) = (2--1, 3-1\frac{1}{2}, 7-2) = (3,1\frac{1}{2},5)$

תכונות שמתקיימות (חיבור)

כל הוקטורים מאותו מימד (n), נקראים $\mathbb{R}^n$ (כאשר n זה אורך הוקטור);

1. סגירות: אם $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^n$ אז $V_1+V_2\in\mathbb{R}^n$ ($\bar{V}$ - גם וקטור, להבהרה)

2. קיבוץ (אסוציאטיבי): לכל $V_1, V_2, V_3 \in\mathbb{R}^n$ אז מתקיים $V_1+(V_2+V_3) = (V_1+V_2)+V_3$

(דורש הוכחה) ⇐ כל סדר קיבוץ בחיבור נותן אותה התוצאה.

3. חילוף: לכל $V_1+V_2\in\mathbb{R}^n$ אז מתקיים $V_1+V_2 = V_2+V_1$

4. קיום איבר (וקטור האפס) $\bar{0}$: המקיים שלכל $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

(כאשר וקטור האפס $\bar{0} = (\underbrace{0,0,0,\dots}_{n\ \text{פעמים}})$) ($\bar{0}$ - האיבר הנטרלי של חיבור).

5. קיום איברים נגדיים: לכל $v \in \mathbb{R}^n$ קיים $(-\bar{v}) \in \mathbb{R}^n$ המקיים $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

לדוגמא: $[-(3,2,7)] = (-3,-2,-7)$

ב) פעולת כפל בסקלר (= מספר).

יהי $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, אזי $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, אזי $v_i \in \mathbb{R}$ לכל i כאשר $1 \le i \le n$

ויהי $a \in \mathbb{R}$.

כפל בסקלר.

$$a \cdot \bar{v} = (av_1, av_2, \dots, av_n)$$

הגדרה.

משפט (הוכחה)

לכל $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ $\quad -\bar{v} = (-1) \cdot \bar{v}$

הוכחה

יהי $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. נבדוק ש $\bar{v} + (-1)v = \bar{0}$

$$\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$(-1)\bar{v} = ((-1)v_1, (-1)v_2, \dots, (-1)v_n)$$

$$\Downarrow$$

$$= (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$$

ולכן,

$$\bar{v} + (-1)\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-v_1, -v_2, \dots, -v_n) =$$

$$= (v_1 - v_1, v_2 - v_2, \dots, v_n - v_n) =$$

$$(0,0,0,\dots,0) = \bar{0}$$

לכן $(-1) \cdot \bar{v} = (-\bar{v})$ מש"ל.

הערה: $v_1 - v_2 \overset{\text{הגדרה}}{=} v_1 + (-v_2)$

תכונות של כפל בסקלר

1. סגירות: לכל $b\in\mathbb{R}$ ו- $\bar{V}\in\mathbb{R}^n$ אז $b\cdot\bar{V}\in\mathbb{R}^n$

2. קיבוציות: $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $\bar{V}\in\mathbb{R}^n$ אז $(a_1\cdot a_2)\cdot\bar{V}=a_1\cdot(a_2\cdot\bar{V})$

כפל המספרים

כפל בסקלר

3. חוק היחידה: לכל $\bar{V}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים $1\cdot\bar{V}=\bar{V}$

4. חוק פילוג I: $\bar{V}_1,\bar{V}_2\in\mathbb{R}^n$, $a,b\in\mathbb{R}$ $\quad a\cdot(\bar{V}_1+\bar{V}_2)=a\cdot\bar{V}_1+a\cdot\bar{V}_2$

5. חוק פילוג II: $\bar{V}_1,\bar{V}_2\in\mathbb{R}^n$, $a,b\in\mathbb{R}$ $\quad (a+b)\cdot\bar{V}_1=a\cdot\bar{V}_1+b\cdot\bar{V}_1$

פתרון מערכות משוואות ליניאריות

צורה מסודרת:

$$\begin{cases}2x+3y+z=5\\ x-5y+2z=10\end{cases}$$

מערכת של 2 משוואות ליניאריות ב-3 נעלמים.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=5\\ x_1-5x_2+2x_3=10\end{cases}$$

(מקדמים - 1,3,2
איבר חופשי -5
נעלמים - x,y,z)

וקטור $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ יקרא פתרון של המערכת אמ"מ (=אם ורק אם) מתקיים $2a_1+3a_2+a_3=5$ וגם $a_1-5a_2+2a_3=10$, כלומר,

(הצבת קורדינאטות הוקטור בכל משוואה תיתן שיוויון אמיתי.)

דוגמא

$x+2y=3 \quad /-2y$ קבוצת כל הפתרונות של מערכת זאת:

$x=3-2y$

הפתרונות $=\{(3-2y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}=\{(3,0)+(-2y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$

קש..

$=\{(3,0)+y(-2,+1)\mid y\in\mathbb{R}\}$

* הערות שלי:
פתרון של מערכות משוואות ליניאריות היא קבוצת כל הוקטורים המקיים את המשוואה.

תהליך האלימינציה של גאוס

שיטה/אלגוריתם לפתרון מערכי משוואות ליניאריות

3 סוגי פעולות

1. הכפלת שורה בסקלר $(\neq 0)$
2. החלפת שורות
3. הכפלת שורה בסקלר והוספתה לשורה אחרת.

במסגרת הפעולות האלה נרצה להגיע לצורה המדורגת ובשלב שני למדורגת קנונית.

דוגמאות:

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & *, & \cdots & & \\ 0, & 0, & 0, & 0, & *, & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & *, \cdots \end{pmatrix}$$

שורות אפסים

(כאשר $* \neq 0$)

הערות שלי:
(המס' הראשון בשורה שהוא שונה מ0).

צורה מדורגת: כל שורה: אם יש בה איבר שונה מאפס, הוא נקרא איבר פותח.
כל איבר פותח נמצא מימין ממש לאיבר הפותח שמעליו.

צורה מדורגת קנונית: היא מדורגת וכן שמעל כל $*$ יש 0, וגם $*=1$.

דוגמא:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \text{איבר חופשי} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 - 2x_4 + 2x_5 \\ x_1 = 1 - 2x_2 + 1x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

איבר פותח: ~~משתנים~~ תלויים.

מדורגת קנונית

משתנים ~~[illegible]~~ ללא איבר פותח = משתנים חופשיים.

מערכת עם ~~[illegible]~~ ∞ פתרונות

$$\{(1-2x_2+x_4-3x_5,\ x_2,\ 1-2x_4+2x_5,\ x_4,\ x_5) \mid x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

~~כאשר בכל שורה~~

כאשר בכל תור יש משתנה תלוי.

אם אין משתנים חופשיים צרי פתרון יחיד.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \{(3,7,2)\in\mathbb{R}^3\}$$

פתרון יחיד.

$x_1=3,\ x_2=7,\ x_3=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \longleftarrow \text{שורת סתירה}$$

אין פתרון למערכת

דוגמא

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{R_2+(-2)R_1}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right) \underset{R_3+(-1)R_1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2\cdot(\frac{1}{8})}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3+(-8)R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_1+3R_2}{=}$$

(צורה מדורגת)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1 = 2 - 2\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = 0 - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

(צורה מדורגת קנונית)

קבוצת הפתרונות

$$\{(2-2\tfrac{1}{2}x_3,\ -\tfrac{1}{2}x_3,\ x_3)\mid x_3\in\mathbb{R}\} = \{\underset{\substack{\text{וקטור איברים}\\\text{חופשיים}}}{(2,0,0)} + \underset{\substack{\text{וקטור איברים עם}\\\text{משתנים}}}{(2\tfrac{1}{2}x_3,\ -\tfrac{1}{2}x_3,\ x_3)} \mid x_3\in\mathbb{R}\} =$$

$$= \{(2,0,0) + \underset{\substack{\text{הוצאת}\\\text{משתנה חופשי}}}{x_3}(-2\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2},\ 1) \mid x_3\in\mathbb{R}\}$$

10.11.19

לינארית

תזכורת

תהליך האלמינציה (חילוץ) של גאוס

דוגמא למערכת מדורגת קנונית:

$$\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}$$

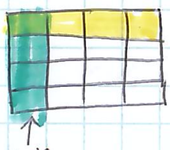
* אם $d \neq 0$ אז המערכת עם שורת סתירה, כלומר אין פתרונות אם $d=0$ אז x_1, x_4, x_7 משתנים תלויים (קשורים), השאר חופשיים.
* כיוון שיש משתנים חופשיים, יש אינסוף פתרונות. אם לא היו משתנים חופשיים, היה רק פתרון יחיד.

הפתרון הכללי:

$$\begin{cases} x_7 = c - 2x_8 \\ x_4 = b - 2x_5 + x_6 - x_8 \\ x_1 = a - 3x_2 - 2x_3 - x_5 - 3x_6 - 4x_8 \end{cases}$$

תורת המטריצות

מטריצה - מלבן של מספרים.



איבר במטריצה מסומן כך:

* $A_{3,4}$ - כאשר: A - שם המטריצה
3 - השורה השלישית
4 - העמודה הרביעית
* A_2 - השורה השניה במטריצה A
* A^4 - העמודה הרביעית במטריצה A
* A מטריצה ממימד 4×4 (שורות, עמודות)

פעולות על מטריצות

ניתן לבצע חיבור וכפל בסקלר (ולכן גם הפרש) של מטריצות באותו מימד.

דוגמאות:

A, B מטריצות ממימד $n \times m$. c - סקלר

חיבור:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

כפל בסקלר:

$$(c \cdot A)_{ij} = c \cdot A_{ij}$$

תכונות חיבור וכפל בסקלר שמתקיימות

חיבור

$C, A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ (מטריצות מסדר $n \times m$, שאיבריהן מתוך $\mathbb{R}$), $e, d \in \mathbb{R}$

1) $A+B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ (סגירות)

2) $A+B = B+A$ (חילוף)

3) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (קיבוץ).

4) קיים $0 \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ($(0)_{ij} = 0$) לכל $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ מתקיים $A+0=A$

(קיום איבר 0)

5) לכל $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ קיים $(-A) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ המקיים $A+(-A)=0$

(קיום איברים נגדיים).

משפט

$$A \cdot (-1) = (-A)$$

כפל בסקלר

1) $d \cdot A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ (סגירות)

2) $(e \cdot d) \cdot A = e \cdot (d \cdot A)$ (קיבוץ)

3) $1 \cdot A = A$ (חוק היחידה).

4) $(e+d) \cdot A = e \cdot A + d \cdot A$ (פילוג מימין).

5) $d \cdot (A+B) = d \cdot A + d \cdot B$ (פילוג משמאל)

כפל מטריצות

יהיו $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$. ולכן $A\cdot B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$

דוגמא:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 11 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}}$$

* חייבים להיות זהים

* הסדר של המטריצה החדשה מסדר הלא זהים

חישוב השורות מפורט

- $C_{1,1} = 2\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 3 = 11$
- $C_{2,1} = 2\cdot 1+2\cdot 2+(-1)\cdot 3 = 3$
- $C_{1,2} = 2\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot 0 = 7$
- $C_{2,2} = 2\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 0 = 6$
- $C_{1,3} = 2\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 2 = 1$
- $C_{2,3} = 2\cdot 1+2\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 =$

כתיבת סכומים

$= 1+2+3+\dots\dots+n$

$\sum\limits_{i=1}^{n} i$ סיגמה

מסיים ב-n

האיבר

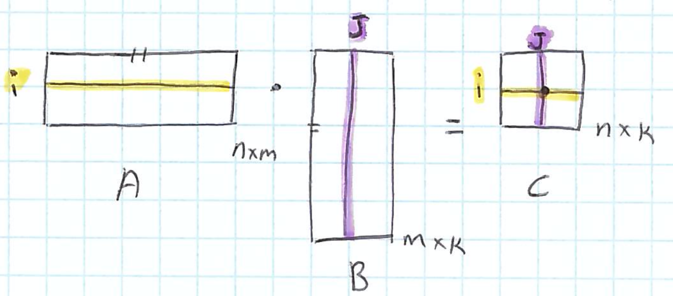
מתחיל ב

לדוגמא:

$$\sum_{i=1}^{8} i = 1+2+3+4+5+6+7+8$$

הגדרת כפל מטריצות

$$(A\cdot B)_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} A_{i,l}\cdot B_{l,j}$$



משפט

מתקיים חוק פילוג לכפל וחיבור מטריצות: יהיו $A,B\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $C\in M_{m\times k}(\mathbb{R})$

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

הוכחה

*יהיה במבחן!

בדיקת שוויון המימדים:

$(A+B)_{n\times m}$ כיוון שמתקיימת סגירות לחיבור

שמאל $((A+B)\cdot C)_{n\times k}$

ימין $(A\cdot C)_{n\times k}$, $(B\cdot C)_{n\times k}$

$((A\cdot C)+(B\cdot C))_{n\times k}$ מסגירות לחיבור.

לכן, המימדים משני צידי השוויון זהים.

בדיקת שוויון האיברים:

$$\left(\underset{n\times m}{(A+B)}\cdot \underset{m\times k}{C}\right)_{i,j} \overset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=} \sum_{l=1}^{m} (A+B)_{i,l}\cdot C_{l,j} \overset{\text{הגדרת חיבור מטריצות}}{=} \sum_{l=1}^{m} (A_{i,l}+B_{i,l})\cdot C_{l,j} \overset{\text{פתיחת סוגריים במספרים (פילוג)}}{=}$$

$$= \sum_{l=1}^{m} (A_{i,l}\cdot C_{l,j} + B_{i,l}\cdot C_{l,j}) \underset{\text{פיצול סכום לשני סכומים}}{=} \sum_{l=1}^{m} A_{i,l}\cdot C_{l,j} + \sum_{l=1}^{m} B_{i,l}\cdot C_{l,j} \underset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=} (A\cdot C)_{i,j} + (B\cdot C)_{i,j}$$

$$\underset{\text{סכום מטריצות}}{=} (A\cdot C + B\cdot C)_{i,j}$$

מש"ל, כל האיברים שווים.

משפט

מתקיים חוק קיבוץ בכפל מטריצות

יהיו $A\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B\in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, $C\in M_{k\times s}(\mathbb{R})$ אזי מתקיים:

$$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$$

הוכחה

*יהיה במבחן!

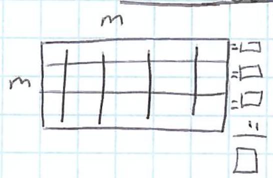
בדיקת המימדים:

צד שמאל: $\left((A\cdot B)_{m\times k}\cdot C_{k\times s}\right)\boxed{m\times s}$

צד ימין: $\left(A_{n\times m}\,(B\cdot C)_{m\times s}\right)\boxed{n\times s}$

מש"ל, המימדים שווים משני הצדדים.

*טענת עזר



$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{J=1}^{m} A_{i,J}\right) =$$ סכום כל איברי המטריצה או סכום ~~סכומי~~ סכומי השורות

$$\sum_{J=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i,J}\right) =$$ סכום סכומי העמודות

*אין כפל בסיגמה

מסקנה:

שינוי סדר הסכימה נותן אותו דבר (אותה התוצאה): חיבור כל איברי המטריצה עם לפי השורות ופעם לפי עמודות.

בדיקת שוויון האיברים

$$(A\cdot(B\cdot C))_{i,J} \overset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=} \sum_{l=1}^{m} A_{i,l}\cdot(B\cdot C)_{l,J} \overset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=} \sum_{l=1}^{m} A_{i,l}\left(\sum_{f=1}^{k} B_{l,f}\cdot C_{f,J}\right) =$$

חוק פילוג של מספרים (פתיחת סוגריים)

$$\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{f=1}^{k} A_{i,l}\cdot B_{l,f}\cdot C_{f,J}\right) \overset{\text{טענת עזר}}{=} \sum_{f=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} A_{i,l}\cdot B_{l,f}\cdot C_{f,J} \overset{\text{חוק פילוג (הוצאת גורם משותף)}}{=} \sum_{f=1}^{k} C_{f,J}\sum_{l=1}^{m} A_{i,l}\cdot B_{l,f}$$

הגדרת כפל מטריצות

$$\sum_{f=1}^{k} C_{f,J}\,(A\cdot B)_{i,f} \overset{\text{חילוף בכפל מספרים}}{=} \sum_{f=1}^{k} (AB)_{i,f}\cdot C_{f,J} \overset{\text{הגדרת כפל במטריצות}}{=} ((AB)\cdot C)_{i,J}$$

*אי אפשר לעשות את הטענה כי f יהיה ...

מש"ל

משפט

תילופיות לא מתקיימת בכפל מטריצות.

דוגמה:

(*) $A_{2\times 5}\cdot B_{5\times 7} = A\cdot B_{2\times 7}$ אבל, $B_{5\times 7}\cdot A_{2\times 5} =$ לא מוגדר

(*) $\underset{2\times 2}{A}\cdot\underset{2\times 2}{B} \neq \underset{2\times 2}{B}\cdot\underset{2\times 2}{A}$ בד"כ

כמו:

$$A\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}1&5\\7&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&16\\-6&3\end{pmatrix}\quad AB$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix}1&5\\7&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2\\16&19\end{pmatrix}\quad BA$$

17.11.19

לינארית

פעולת השחלוף על מטריצות

הגדרה $(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$ נקרא גם transpose

דוגמא

$$\begin{array}{cc} A & A^t \\ \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(A_{n\times k})^t_{k\times n}$$

תכונות של פעולת השחלוף

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

הוכחה

$$((A+B)^t)_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = (A^t)_{i,j} + (B^t)_{i,j}$$

בדיקת מימדים

$$(B_{n\times k} + A_{n\times k})^t = (A+B)^t_{k\times n}$$

$$A_{n\times k} + B_{n\times k} = (A^t)_{k\times n} + (B^t)_{k\times n} = (A^t + B^t)_{k\times n}$$

2) $(cA)^t = c\cdot A^t$

3) $(A^t)^t = A$

הוכחה

בדיקת המימדים

$$A_{n\times k} \to A^t_{k\times n} \to (A^t)^t_{n\times k}$$

בדיקת הקורדינטות

$$((A^t)^t)_{i,j} = (A^t)_{j,i} = A_{ij}$$

מש"ל

משפט

*יהיה במבחן!

$$(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

הוכחה

בדיקת המימדים

$A_{n\times k}, B_{k\times m}$,

$(A\cdot B)_{n\times m}$ $\quad$ $(B^t)_{m\times k}$

$(A\cdot B)^t_{m\times n}$ $\quad$ $(A)^t_{k\times n}$

$(B^t\cdot A^t)_{m\times n}$

משל מימדים.

בדיקת קורדינטות/התכולה

$$((A\cdot B)^t)_{i,j} \overset{\text{הגדרת שיחלוף}}{=} (A\cdot B)_{j,i} \overset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=} \sum_{l=1}^{k} A_{j,l}\cdot B_{l,i} \overset{\text{הגדרת שיחלוף}}{=} \sum_{l=1}^{k} (A^t)_{l,j}\cdot (B^t)_{i,l} \overset{\text{חילוף של כפל מספרים}}{=}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} (B^t)_{i,l}\cdot (A^t)_{l,j} \overset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=} (B^t\cdot A^t)_{i,j}$$

משל תכולה.

מטריצת היחידה

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית שמסומנת כך:

מקיימת: $I_{n\times n}\cdot A_{n\times k} = A_{n\times k}$

$I_{n\times n}\cdot A_{n\times n} = A_{n\times n}\cdot I_{n\times n} = A_{n\times n}$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\0&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\0&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\0&3&2\end{pmatrix}$$

* מתפקד כמו איך ש-1 מתפקד במספרים. היא נטרלית לכפל מטריצות.

הצגה מטריציונית של מערכת משוואות

דוגמא:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2$$
$$1x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7$$

$$\Leftarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

מטריצת המקדמים

(וקטור המשתנים)

וקטור האיברים החופשיים

נניח יש לנו n משוואות עם n נעלמים:

ההצגה המטריציונית: $A \cdot \bar{X} = \bar{b}$ או $A_{n\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\bar{X}$ – ~~מטריצה~~ וקטור, $\bar{b}$ – וקטור

מטריצה הפוכה

הגדרה

אם A מטריצה, B תקרא מטריצה הפוכה של A אמ"מ מתקיים ש:

$$A\cdot B = B\cdot A = I$$

כלומר, B,A מטריצות ריבועיות מאותו הסדר.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{n\times k\;\; k\times m}{A\cdot B} = \cancel{(A\cdot B)} \Rightarrow B_{k\times m}\cdot A_{n\times k} \Rightarrow m=n \\ (B_{k\times n}\, A_{n\times k})_{k\times k} \Rightarrow k=n \end{array}\right\} \Rightarrow (A\cdot B)_{n\times n} = (B\cdot A)_{k\times k} = I_{n\times n}$$

אם A הפיכה אז A ריבועית, וגם המטריצה ההפכית שלה היא ריבועית מאותו הסדר.

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

אם A הפיכה אזי קיימת B המקיימת $A\cdot B = B\cdot A = I$

ולכן, אם B הופכית של A אז A הופכית של B.

משפט

ההופכית היא היחידה.

כלומר: אם B_1, B_2 הופכיות של A אז $B_1 = B_2$

הוכחה

$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = I \rightarrow B_1$ הופכית של A

$A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = I \rightarrow B_2$ הופכית של B

$$AB_1 = I \quad /\cdot B_2$$

$$B_2(AB_1) = B_2 I$$

$$(B_2 A)B_1 = B_2$$

$$I B_1 = B_2$$

$$B_1 = B_2 \quad \text{מש"ל}$$

מסקנה, אפשר לרשום A^{-1} ההופכית של A.

כתיבת המסקנה הקודמת מתפשר:

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

* הערה

במטריצות להרבה מטריצות ששונות ממטריצת האפס אין הופכי.

המשך הצגה מטריציונית של מערכת משוואות.

(n משוואות עם n משתנים)

$$\underset{n \times n}{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

נניח A הפיכה.

נכפיל משמאל ב A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \bar{x}) = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$(A^{-1} \cdot A)\bar{x} = A^{-1} b$$

$$I \bar{x} = A^{-1} b$$

$$\bar{x} = A^{-1} b$$

~~בדיקת הפתרון~~

בדיקת הפתרון

הצבה

$$A \cdot (A^{-1} \cdot \bar{b}) \stackrel{?}{=} \bar{b}$$

$$(A \cdot A^{-1}) \cdot \bar{b} \stackrel{?}{=} \bar{b}$$

$$I \cdot \bar{b} \stackrel{\checkmark}{=} \bar{b}$$

מסקנה

אם מטריצת המקדמים (A) הפיכה, יש פתרון יחיד $(A^{-1} \cdot \bar{b})$.

משפט

אם A,B הפיכות אז גם $A\cdot B$ הפיכה ומתקיים $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

הוכחה

קיימות A^{-1}, B^{-1} המקיימות $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$, $B^{-1}\cdot B=B\cdot B^{-1}=I$.

(*) $$(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1})\overset{\text{קיבוץ}}{=}((AB)B^{-1})A^{-1}=((A(BB^{-1}))A^{-1})=(AI)A^{-1}=AA^{-1}=I$$

(*) $$(B^{-1}\cdot A^{-1})(A\cdot B)\overset{\text{קיבוץ}}{=}((B^{-1}A^{-1})A)B=(B^{-1}(A^{-1}A))B=(B^{-1}I)\cdot B=B^{-1}B=I$$

~~מש"ל~~

$$B^{-1}\cdot A^{-1}=(AB)^{-1}$$

מש"ל

משפט

אם $A_1,A_2,A_3,\dots,A_n$ מטריצות הפיכות אז מתקיים:

$$A_n^{-1}\cdot A_{n-1}^{-1}\cdot\ \dots\ \cdot A_1^{-1}$$

הוכחה

$n\geq 2$: (אינדוקציה על n)

בדיקה

עבור $n=2$

$(A_1\cdot A_2)=A_2^{-1}\cdot A_1^{-1}$, הוכחנו במשפט הקודם

הנחה

נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ כלומר $(A_1\cdot A_2\cdots A_k)=A_k^{-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$.

הוכחה

$$(A_1\cdot A_2\cdots A_k\cdot A_{k+1})^{-1}=(\underbrace{(A_1\cdot A_2\cdots A_k)}_{\text{הפיכה}}\cdot A_{k+1})^{-1}\overset{\text{מהנחת האינדוקציה + משפט קודם.}}{=}A_{k+1}^{-1}\cdot(A_1\cdots A_k)=$$

$$=A_{k+1}^{-1}\cdot A_k^{-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\cdots\cdots A_1^{-1}$$

מש"ל.

מטריצות אלמנטריות

פעולת שורה אחת $\overbrace{\text{אחת}}^{\text{אלמנטרית}}$ על I נותנת מטריצה אלמנטרית.

לכן, יש שלושה סוגי מטריצה אלמנטריות.

א) $R_{i,j}$ (החלפת שורות) $\leftarrow$ $E_{i,j}$

דוגמא:

$$\underset{I}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \underset{R_{2,3}}{=} \underset{E_{(2,3)}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}$$

ב) $R_i(a),\ a\neq 0$ (הכפלת שורה i במס') $\leftarrow$ $E_i(a)$

דוגמא:

$$\underset{I}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} = \underset{E_2(7)}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

ג) $R_j^i(a)$ (הכפלת שורה J ב-a והוספתה לשורה i) $\leftarrow$ $E_j^i(a)$

$$\underset{I}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} = \underset{E_3^2(2)}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

משפט

הכפלת מטריצה אלמנטרית במטריצה A מצד שמאל נותנת את פעולת השורה המתאימה על A.

הוכחה ע"י דוגמא

א) עשה החלפת שורות בין 2 ו-3.

$$\underset{E_{2,3}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix}$$

ג) הכפלת השורה השלישית ב-2 והוספה לשורה 2.

$$\underset{E_3^2(2)}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\18&21&24\\7&8&9\end{pmatrix}$$

משפט

כל המטריצות האלמנטריות הן הפיכות ומתקיים:

א) $\cancel{(E_{i,j})^{-1} = E_{i,j}}$

א) $(E_{i,j})^{-1} = E_{i,j}$

ב) $(E_i(a))^{-1} = E_i(\frac{1}{a})$

ג) $(E_i^j(a))^{-1} = E_i^j(-a)$

המטריצה האלמנטרית שמתאימה לפעולה ההפוכה היא המטריצה ההפוכה של המטריצה האלמנטרית

דוגמה

$$\underset{E_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{E_{2,3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

מסקנה

נניח ישלנו מערכת משוואות של n משוואות ו- n נעלמים.

$$\underset{n\times n}{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

תהליך הדירוג יכול להיות מתואר ע"י ~~פעולת כפל במטריצה אלמנטרית מצד שמאל~~.

$$(E_n(\cdots(E_3(E_2(E_1 \cdot A)))))$$

הכפלה מצד שמאל במטריצות האלמנטריות המתאימות.

מטריצה מדורגת קנונית $= E_n \dots E_3 E_2 E_1 = A$

מטריצה מדורגת קנונית מגודל $n\times n$, או שיש בה שורת אפסים או יש איבר פותח בכל שורה ואז המטריצה היא I.

מסקנה

כל מטריצה ריבועית ניתן להכפיל בסדרה של מטריצות אלמנטריות ולקבל אחת משתי אופציות:

- מטריצה עם שורת אפסים.
- את I.

משפט

אם תהליך הדירוג של A הוביל ל-I אז A הפיכה.

הוכחה

לכן קיימות $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (המטריצות האלמנטריות שמתאימות לפעולות השורה שהובילו אותנו ל-I).

$$E_n^{-1} \cdot / \quad E_n \cdots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 A = I$$

$$E_{n-1}^{-1} / \quad I \cdot E_{n-1} \cdot \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_n^{-1} \cdot I$$

$$E_{n-2}^{-1} / \quad I \cdot E_{n-2} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}$$

$$I \cdot E_{n-3} \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 A_1 = E_{n-2} \cdots E_n$$

$$\vdots$$

$$A = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{n-2}^{-1} E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}$$

קיבלנו ש-A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות. הן הפיכות ולכן A הפיכה.

מתקבל:

$$A^{-1} = (E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1})^{-1} = E_n E_{n-1} \cdots E_1$$

24.11.19

לינארית

תזכורת

- $A_{n\times n}$ אז B הפוכה של A אמ"מ מתקיים $A\cdot B=B\cdot A=I$
- יש הפוכה יחידה
- $(A^{-1})^{-1}=A$
- המטריצות האלמנטריות
  - $E_{i,j}$ - החלפת שורות $\qquad (E_{i,j})^{-1}=E_{ij}$
  - $E_i(a)$ $a\neq 0$ - הכפלת שורה ב-a $\qquad (E_i(a))^{-1}=E_i(\frac{1}{a})$
  - $E_i^j(a)$ - הכפלת שורה i ב-a והוספה לשורה j $\qquad (E_i^j(a))^{-1}=E_i^j(-a)$
- אם A שקולת שורות ל-I אז A הפיכה, קיימות $E_1,\dots,E_n$ שמקיימות $E_n\cdot\ldots\cdot E_1\cdot A=I$

ומתקיים ש $A^{-1}=E_n\cdot\ldots\cdot E_1$

אלגוריתם לחישוב A^{-1}

$$\left(A\,\middle|\,I\right)$$

נשתמש במטריצה הבאה (כאשר יש את A, ו-I):

נבצע את תהליך האלמינציה של גאוס על A (על כל השורות)

בסוף התהליך, אם נקבל שורת אפסים סימן ש-A לא הפיכה, אם נקבל את I

אז A הפיכה ונקבל מימין את A^{-1}. (נוגע מ *).

דוגמא

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&10&0&0&1\end{array}\right)\underset{R_3-7R_1\to R_3}{\overset{R_2-4R_1\to R_2}{=}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-11&-7&0&1\end{array}\right)\overset{\frac{R_2}{-3}}{=}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&-6&-11&-7&0&1\end{array}\right)\underset{R_3+6R_2\to R_3}{\overset{R_1-2R_2\to R_1}{=}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)\underset{R_1+R_3\to R_1}{\overset{R_2-2R_3\to R_2}{=}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&1\\0&1&0&-\frac{2}{3}&\frac{11}{3}&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

בדיקה

* מומלץ לבדוק במבחן ככה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}&1\\-\frac{2}{3}&\frac{11}{3}&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

*לא במבחן.

משפט

תהליך הדירוג של מטריצה ריבועית מסתיים ב- I או במטריצה עם שורת אפסים.

משפט * יהיה במבחן!

אם $A_{n \times n}$ שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים אז A לא הפיכה.

הוכחה

נניח בשלילה ש-A שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים ובכל זאת A הפיכה,

לכן קיימת מטריצה B המקיימת $A \cdot B = B \cdot A = I$ וקיימות $E_1, \dots, E_n$

מטריצות אלמנטריות המקיימות $E_n \cdots E_1 A = \underbrace{(\circ\circ\circ\circ\circ)}_{\text{מטריצה עם שורת אפסים}}$.

$$E_n \cdot \ldots \cdot E_1 \underbrace{AB}_{I} = \begin{pmatrix} \text{מטריצה עם} \\ \text{שורת אפסים} \\ \circ\circ\circ\circ\circ \end{pmatrix} B \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \circ\circ\circ\circ\circ \end{pmatrix} \cdot \underbrace{B}_{\text{מטריצה}} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ\circ\circ\circ\circ \end{pmatrix}$$

מכפלה מימין נותנת שורת אפסים

$E_1, \dots, E_n$ הן מטריצות אלמנטריות ולכן הפיכות.

$$E_n \cdot \ldots \cdot E_1 = (\circ\circ\circ\circ\circ) \quad / \cdot E_1^{-1}$$

$$E_n \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot \underbrace{E_1 \cdot E_1^{-1}}_{I} = (\circ\circ\circ\circ\circ) \cdot E_1^{-1} \longrightarrow \quad -''-$$

$$E_n \cdot \ldots \cdot E_2 = (\circ\circ\circ\circ\circ) \quad / \cdot E_2^{-1}$$

$$E_n \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_2^{-1} = (\circ\circ\circ\circ\circ) \cdot E_2^{-1}$$

$$E_n \cdot \ldots \cdot E_3 = (\circ\circ\circ\circ\circ)$$

$$\vdots \quad \downarrow$$

$$I = (\circ\circ\circ\circ\circ)$$

סתירה! ב-I אין שורת אפסים.

משפט *יהיה במבחן

אם $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ ומתקיים $A\cdot B=I$ אז מתקיים גם $B\cdot A=I$

הוכחה

נניח שהדירוג של A מוביל למטריצה עם שורת אפסים.

לכן קיימות מטריצות אלמנטריות (לכן הפיכות) $E_1,\dots,E_n$ המקיימות

ש $E_n\cdot\ldots\cdot E_1\cdot A=(\circ\circ\circ\circ\circ)$ נכפיל מימין ב-B

$$E_n\cdot\ldots\cdot E_1\cdot \overset{\text{מתקיים } I}{A\cdot B}=(\circ\circ\circ\circ\circ)B$$

$$E_n\cdot\ldots\cdot E_1=(\circ\circ\circ\circ\circ)\ /\cdot E_1^{-1}\ \text{מימין}$$

$$E_n\cdot\ldots\cdot E_2=(\circ\circ\circ\circ\circ)\ /\cdot E_2^{-1}\ \text{מימין}$$

$$E_n\cdot\ldots\cdot E_3=(\circ\circ\circ\circ\circ)$$

$$\vdots$$

$$I=(\circ\circ\circ\circ\circ)$$ סתירה.

הראינו שדירוג של A מוביל ל-I, ולכן הפיכה.

עפ"י המשפט הקודם נקבל שהדירוג של A מוביל ל-I. (במבחן צריך לכתוב).

(אם A שקולת שורות למטריצה בעלת שורת אפסים אז A לא הפיכה).

לכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,\dots,E_k$ המקיימות $E_k\cdot\ldots\cdot E_1A=I$.

לכן עפ"י המשפט הקודם A הפיכה וגם מתקיים $E_k\cdot\ldots\cdot E_1=A^{-1}$

(אלגוריתם הדירוג של מטריצה ריבועית מסתיים ב-I אז A הפיכה)($E_k\cdot\ldots\cdot E_1$ ההפיכה)

נסמן $E_k\cdot\ldots\cdot E_1=C$ ומתקיים $C\cdot A=I$ וגם $A\cdot C=I$.

($A\cdot B=I$ ידוע מנתון).

$$C\cdot/\ AB=I$$

$$C(AB)=CI=C$$ ← כפל מטריצות הוא קיבוצי*

$$(CA)B=C$$ ← ממה שמצאנו

$$I\cdot B=C$$

$$B=C$$

ולכן מתקיים:

$$CA=I$$ ← הצבה

$$BA=I$$

מש"ל.

מסקנה

מספיק ש $A\cdot B=I$ אז $BA=I$, $B^{-1}=A$ וגם $A^{-1}=B$.

משפט

אם במערכת משוואות לינארית בצורה מטריציונית $A_{n\times n}\cdot \bar{x}=\bar{b}$ (מערכת של n משוואות n נעלמים).

אם יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^n$ אז A הפיכה.

<u>הוכחה</u>

נבחר $b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ b_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\leftarrow i \qquad 1\le i\le n$

(*) עפ"י הנתון, למערכת $Ax=b_1$ יש פתרון, נסמן את הפתרון c_1 כלומר מתקיים $A\cdot c_1=b_1$.

עפ"י הנתון למערכת $Ax=b_2$ יש פתרון, נסמן את הפתרון c_2 כלומר מתקיים $A\cdot c_2=b_2$.

$\vdots$

עפ"י הנתון למערכת $Ax=b_n$ יש פתרון, נסמן את הפתרון c_n כלומר מתקיים $A\cdot c_n=b_n$.

נגדיר מטריצה $C=\begin{pmatrix}| & | & | & & |\\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n\\ | & | & | & & |\end{pmatrix}$

נבדוק, $A\cdot C=?$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}| & & |\\ c_1 & \cdots & c_n\\ | & & |\end{pmatrix}\underset{\text{הגדרת כפל מטריצות}}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ A\cdot c_1 & A\cdot c_2 & \cdots & A\cdot c_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\underset{A\cdot c\Rightarrow A\cdot x=b\ (*)\ \text{c כלשהו}}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}\underset{\text{מהגדרה של } b_1,\dots,b_n}{=} I \overset{\text{קיבלנו}}{\Longrightarrow} A\cdot C=I$$

עפ"י המשפט הקודם, A הפיכה ו- C ההופכית שלה. מש"ל.

הערה

גם המשפט ההפוך נכון.

נניח ש A הפיכה. יהי $b\in\mathbb{R}^n$. נסתכל על המערכת $Ax=b$

נכפיל מצד שמאל את ההופכית של A.

$$A^{-1}\cdot /\ Ax=b$$
$$A^{-1}\cdot Ax=A^{-1}b$$
$$Ix=A^{-1}b$$
$$x=A^{-1}b$$

בדיקת הפתרון

$$A\cdot(A^{-1}\cdot b)\underset{\text{קיבוץ}}{=}(A\cdot A^{-1})b\underset{\text{הגדרת הופכית}}{=}b \qquad (\text{זה פתרון } b)$$

משפט

מערכת משוואות ליניארית ריבועית שמטריצת המקדמים שלה שקולת שורות ל- I, יש לה פתרון יחיד.

הוכחה

$A_{n\times n}$, $Ax=b$

ע"פ משפט קודם A הפיכה (שקולה ל- I), נכפיל ב A^{-1} משמאל.

$$A^{-1}\cdot /\ Ax=b$$
$$(A^{-1}A)x=A^{-1}b \quad \leftarrow\text{קיבוציות}$$
$$Ix=A^{-1}b$$
$$x=A^{-1}b$$

הוכחנו שאם קיים פתרון הוא בהכרח $A^{-1}b$ (כלומר, יחיד).

נבדוק ש- $x=A^{-1}b$ אכן פתרון. נציב:

$$A\cdot(A^{-1}b)=b \quad \leftarrow\text{קיבוץ}$$
$$(A\cdot A^{-1})\cdot b=b$$
$$Ib=b$$
$$b=b$$

ואכן הפתרון קיים.

משפט

מערכת משוואות לינארית ריבועית שמטריצת המקדמים שלה שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים: אז

$$A \cdot X = b$$

לאחר דירוג

$$\begin{pmatrix} \\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} b' \\ * \end{pmatrix}$$

האיבר המתאים בוקטור הפתרונות מול שורת אפסים.

אם $* \neq 0$: אין פתרון למערכת (מספיק שורת אפס אחת עם סתירה)

אם $* = 0$: יש אינסוף פתרונות (בכל שורות האפסים זה מתקיים)

הסבר: יש משתנים חופשיים בהם ניתן לבחור כל ערך, ושאר ערכי המשתנים התלויים נקבעים. ולכן מקבלים אינסוף פתרונות.

1.12.19

ליניארית

הגדרת חזקה על מטריצות (ריבועית $n\times n$)

הגדרה

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$$ (קיים חוק קיבוץ ולכן ניתן לקבל ל-A^n.)

$$A^0 = I$$ (כדי שיתקיים ← $A^0 \cdot A^n = I \cdot A^n = A^n$)

תכונות שמתקיימות עם חזקות

$m,n \in \mathbb{N}$

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = A^{n\cdot m}$$

$$(A\cdot B)^n \neq A^n \cdot B^n$$

הסבר

$$(AB)^n = \underbrace{(AB)\cdot(AB)\cdot \ldots \cdot(AB)}_{n \text{ פעמים}} = \ldots = A^n \cdot B^n$$

דורש חוק חילוף, לא בהכרח מתקיים

משפט

חוקי חזקות ממשיכים להתקיים גם $m,n \in \mathbb{Z}$.

תכונות שמתקיימים עם חזקות שליליות

$$A^{-m} = (A^m)^{-1} \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$A^{-1} = (A^1)^{-1}$$ (מקרה פרטי):

בדיקה על דוגמאות:

$$A^n \cdot A^m \stackrel{?}{=} A^{n+m}$$

$$(A^n)^m \stackrel{?}{=} A^{n\cdot m}$$

חוק הכפל

(לא במיקוד אבל לדעת.

* $(A^2)^{-3} = ((A^2)^3)^{-1} = (A^6)^{-1} \underset{\text{הגדרה}}{=} A^{-6}$

* $(A^{-3})^2 = ((A^3)^{-1})^2 = ((AAA)^{-1})^2 = (A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1})^2 = ((A^{-1})^3)^2 = (A^{-1})^6 \underset{\text{משפט הפיכות של מכפלה}}{=} (A^6)^{-1} \underset{\text{הגדרה.}}{=} A^{-6}$

$$* \quad (A^{-2})^{-3} \underset{\text{הגדרה}}{=} ((A^{-2})^{3})^{-1} = (((A^{2})^{-1})^{3})^{-1} = (((A^{-1})^{2})^{3})^{-1} \underset{\substack{\text{חוקי חזקה}\\ \text{בטבעיים.}}}{=} ((A^{-1})^{6})^{-1} = (\underbrace{A^{-1}\cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{\text{6 פעמים}})^{-1} \underset{(A^{-1})^{-1}}{=}$$

$$\underbrace{A\cdot \ldots \cdot A}_{\text{6 פעמים}} = A^{6}$$ „

חוק החיבור
(לא מתקיים אבל לכפל)

$$* \quad A^{2}\cdot A^{-3} = A\cdot A\cdot (A^{3})^{-1} = \underbrace{A\cdot \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I}\cdot A^{-1}}_{I}\cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$* \quad A^{-2}\cdot A^{-3} \underset{\substack{\text{משפט הופכי}\\ \text{של מכפלה}}}{=} (A^{2})^{-1}\cdot (A^{3})^{-1} = \underline{A^{-1}\cdot A^{-1}} \cdot \underline{A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}} = (A^{-1})^{5} \underset{\substack{\text{ההופכי}\\ \text{של מכפלה}}}{=} (A^{5})^{-1} = A^{-5}$$

הערה:

$\frac{A^{n}}{A^{m}} = X$ לא מתקיים במטריצות. לא לכל מטריצה יש הופכי,
(חלוקה זה כפל בהופכי).

דטרמיננט של מטריצה

$A_{k\times k}$ $\det(A) = |A| =$ מספר.

הגדרה ברקורסיה

אם $k=1$, אז $|A| = a$ $A=(a)$

אם $k=2$ אז $|A| = ad-bc$ $A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

אם $k=3$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{פיתוח}\\ \text{לפי שורה}\\ \text{ראשונה}}}{=} A_{11}\cdot (-1)^{\overset{\text{שורה}}{1}+\overset{\text{עמודה}}{1}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{בלי שורה 1}\\ \text{ובלי עמודה 1}\\ (M_{1,1}(A))}} + A_{12}\cdot (-1)^{1+2} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{בלי שורה 1}\\ \text{ובלי עמודה 2}\\ (\min_{1,2}(A))}} + A_{13}(-1)^{1+3} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{בלי שורה 1}\\ \text{ובלי עמודה 3.}\\ (\min_{1,3}(A))}} =$$ תוצאה.

הערה

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{פיתוח לפי}\\ \text{שורה 1}}}{=} a\cdot (-1)^{1+1}|d| + b\cdot (-1)^{1+2}|c| = a\cdot d - b\cdot c$$

ההגדרה הכללית

סימון: $M_{i,j}(A)$ המטריצה המינורית i,j של A.
זו המטריצה המתקבלת מ-A ע"י השמטת השורה ה-i ועמודה j.
המינור ה i,j $= |M_{i,j}(A)|$.

$$|A|_{k\times k} \underset{\substack{\text{פיתוח לפי}\\ \text{שורה } i}}{=} \sum_{j=1}^{k} A_{i,j}(-1)^{i+j}\cdot \left|M_{i,j}(A)\right|$$

דוגמא

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{פיתוח לפי}\\ \text{שורה 1.}}}{=} 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(45-48) - 2\cdot(36-42) + 3\cdot(32-35) = -3+12-9 = 0.$$

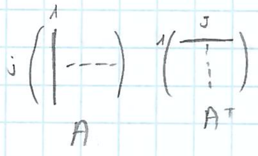
$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} \underset{\substack{\text{פיתוח}\\ \text{לפי שורה 2}}}{=} 4\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix} =$$

ה-$|A|=0$ ולכן היא לא הפיכה. עוד לא הוכחנו.

$$= -4\cdot(18-24) + 5(9-21) - 6(8-14) = 24-60+36 = 0.$$

משפט (ללא הוכחה).
$|A|$ נותנת את אותה התוצאה כאשר מחשבים פיתוח לפי כל שורה וכל עמודה.

$M_{1,j}(A^T) = (M_{j,1}(A))^T$



משפט
לכל $A_{k\times k}$ מתקיים $|A|=|A^T|$

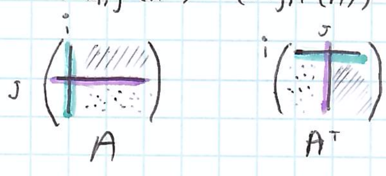
הוכחה
באינדוקציה על k.
אם $k=1$ $A=A^T$ ולכן מתקיים.
נניח שהמשפט מתקיים לכל גודל $n<k$ ונוכיח את המשפט עבור גודל k:

$$|A^T| \underset{\substack{\text{פיתוח לפי}\\ \text{שורה 1}}}{=} \sum_{j=1}^{k} (A^T)_{1,j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot\left|M_{1,j}(A^T)\right| \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{k} A_{j,1}\cdot(-1)^{j+1}\cdot\left|(M_{j,1}(A))^T\right| \underset{\substack{\text{הנחת}\\ \text{האינדוקציה}}}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} A_{j,1}(-1)^{j+1}\cdot\left|M_{j,1}(A)\right| \underset{\substack{\text{פיתוח לפי}\\ \text{עמודה ראשונה.}}}{=} |A|.$$

מש"ל

$M_{1,j}(A^T) = (M_{j,1}(A))^T$



משפט

אם ב- $A_{k\times k}$ יש שורה או עמודה (כאשר $k\geq 2$) פרופורציונית לשורה/עמודה אחרת אז $|A|=0$.

הסבר

השורה ה-i - A_i

השורה ה-j - A_j ← אז $A_i = a\cdot A_j$ $(a\neq 0)$.

הוכחה באינדוקציה על k.

בסיס $k=2$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ ma & mb \end{vmatrix} = a\cdot mb - b\cdot ma = 0$$

נניח שהמשפט מתקיים בכל מטריצה עם 2 שורות פרופורציוניות מגודל $< k$.

תהי מטריצה A מגודל k עם שתי שורות פרופורציוניות

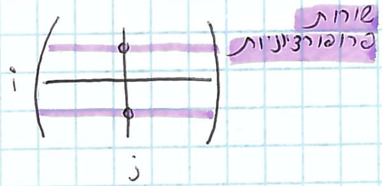
נניח $k\geq 3$. נבחר שורה שהיא לא אחת מהפרופורציוניות.

נעשה פיתוח לפי שורה i.

שורה i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{k} A_{ij}(-1)^{i+j}\,|M_{ij}(A)| = \sum_{j=1}^{k} A_{ij}(-1)^{i+j}\cdot 0 = 0$$

עפ"י הנחת האינדוקציה כי ב- $M_{ij}(A)$ יש עדיין שתי שורות פרופורציוניות. השמטנו את השורה i שהיא לא אחת מהשורות הפרופורציוניות.



הגדרה

מטריצה $A_{k\times k}$ נקראת משולשית עליונה אם"ם רק האיברים שבאלכסון הראשי ומעליו שונים אולי מ-0. (כל האיברים שמתחת לאלכסון הראשי = 0).

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(כלומר מדורגת לא בהכרח קנונית).

משפט

$A_{k\times k}$ משולשית עליונה אז $|A|$ = למכפלת איברי האלכסון.

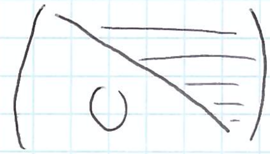
הוכחה באינדוקציה על k

$k=1$ ברור.

$k=2$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = ad - b\cdot 0 = ad$$

נניח שהטענה נכונה עבור כל מטריצה משולשית עליונה מגודל קטן מ-k,
ונוכיח עבור מטריצה משולשית עליונה מגודל k.

$A=$ 

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{פיתוח לפי}\\ \text{עמודה ראשונה}}}{|A| =} \sum_{J=1}^{k} A_{J,1}(-1)^{J+1}\cdot|M_{J,1}(A)| \underset{\substack{\downarrow\\ \text{רק } J=1\\ \text{המקדם שונה}\\ \text{מאפס.}}}{=} A_{1,1}\cdot(-1)^2|M_{1,1}(A)| \underset{\substack{\downarrow\\ \text{עפ הנחת האינדוקציה}\\ \text{כיון ש } M_{1,1} \text{ משולשית}\\ \text{עליונה}}}{=} A_{1,1}\cdot \underbrace{A_{22}\cdot\ldots\cdot A_{k,k}}_{\text{הנחת האינדוקציה}}$$

מש"ל.

הגדרה

לכל מטריצה $A_{k\times k}$ נגדיר את A^* (המטריצה הצמודה).

$$(A^*)_{i,J} = (-1)^{i+J}\cdot|M_{i,J}(A)|$$

דוגמא

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^* = \begin{pmatrix} (18-12) & -(9-4) & (3-2) \\ -(9-3) & (9-1) & -(3-1) \\ (4-2) & -(4-1) & (2-1) \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ //

לינאריות

8.12.19

תזכורת

המטריצה המצורפת: $(A^*)_{i,j}=(-1)^{i+j}|M_{i,j}(A)|$

משפט *יהיה במבחן

$$A\cdot(A^*)^t=\underset{\text{מספר}}{|A|}\cdot I=\begin{pmatrix}|A|&0&0\\0&|A|&0\\0&0&|A|\end{pmatrix}$$

הוכחה

- נניח $i=j$

$$(A\cdot(A^*)^t)_{i,j}=\sum_{l=1}^{n}A_{i,l}\,((A^*)^t)_{l,j}=\sum_{l=1}^{n}A_{i,l}\cdot A^*_{j,l}\overset{*}{=}\sum_{l=1}^{n}A_{i,l}\cdot(-1)^{j+l}\cdot|M_{j,l}(A)|$$

$$=\sum_{l=1}^{n}A_{i,l}\cdot(-1)^{i+l}|M_{i,l}(A)|=|A|$$

פיתוח לפי שורה i

- נניח $i\neq j$

$$(A\cdot(A^*)^t)_{i,j}=\dots\overset{*}{=}\underbrace{\sum_{l=1}^{n}A_{i,l}\cdot(-1)^{j+l}\cdot|M_{j,l}(A)|}_{\text{נמחיש עם המטריצה } B}=$$

$$A:\begin{pmatrix}\text{———}\\ \text{———}\end{pmatrix}\begin{matrix}i\\j\end{matrix}\qquad B:\begin{pmatrix}\text{———}\\ \text{———}\end{pmatrix}\begin{matrix}i\\i\end{matrix}$$

נבנה מטריצה חדשה B (להמחשה), כך שבשורה j של B נשים את השורה i של A.

$=|B|=0$

פיתוח לפי שורה j

משפט: במטריצה שיש בה 2 שורות פרופורציונליות הדטרמיננטה 0.

מסקנה מכל $i\neq j$ אזי $0=|A|_{i,j}$

וכאשר $i=j$ אזי $|A|=|A|_{i,j}$

מש"ל

תוצאה

אם $|A|\neq 0$

נכפיל את שני האגפים ב $\frac{1}{|A|}$ (מספר), ונקבל

$$\frac{A\cdot(A^*)^t}{|A|} = I \xrightarrow{\text{מסקנה}} \boxed{\frac{(A^*)^t}{|A|} = A^{-1}}$$

(כלומר, ניתן להשתמש בזה כנוסחה למציאת A^{-1} כאשר $|A|\neq 0$)

משפט ללא הוכחה

נוסחת קרמר לפיתרון מערכת משוואות (n משוואות, n נעלמים).

הערה:

$x = A^{-1}\cdot b$

אם $|A|\neq 0$ $\quad A\cdot\bar{x} = b$

לכל i, $1\leq i\leq n$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad \Delta = |A| \text{ (נגדיר)}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ A^1 & A^2 & \cdots & A^{i-1} & b & A^{i+1} & \cdots & A^n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{vmatrix}$$

(המטריצה A שהעמודה ה-i שלה הוחלפה בוקטור b).

דוגמא

פתירת המערכת ע"י קרמר.

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 4x+5y+6z=-4 \\ 7x+8y+10z=5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$|A| = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (50-48)-2(40-42)+3(32-35) =$$

$$= 2+4-9 = -3$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-13}{-3} = \frac{13}{3} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{92}{-3} = -30\tfrac{2}{3} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-66}{-3} = 22$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -13 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 92 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -66$$

תשובה:

$$x = \left(\tfrac{13}{3}, -30\tfrac{2}{3}, 22\right)$$

<u>השפעה של פעולות אלמנטריות על הדטרמיננטה</u>

$E_i(a) \qquad a \neq 0$

המטריצה האלמנטרית המתאימה להכפלת שורה i ב-a.

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ aA_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי שורה } i}{=} \sum_{j=1}^{l} (a\cdot A_{i,j})(-1)^{i+j} |M_{i,j}(A)| = a\sum_{j=1}^{l} A_{ij}(-1)^{i+j}|M_{i,j}(A)|$$

$$= |A|\cdot a$$

ב) $E_i \leftrightarrow E_j$

<u>החלפת שורות:</u>

<u>טענת עזר</u>

$$\text{שורה } i \rightarrow \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + B \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}}_{A_2}$$

<u>הוכחת טענת העזר</u>

נחשב את ה det של המטריצה השמאלית ע"י פיתוח לפי שורה i:

$$|D| \underset{\text{פיתוח לפי שורה } i}{=} \sum_{l=1}^{n} (A_l + B_l)\cdot(-1)^{i+l} |M_{i,l}(D)| =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\overset{\text{וקטור שורה}}{A_l}}_{\text{איברי השורה ה-}i\text{ ב-}A_1} (-1)^{i+l} |M_{i,l}(D)| + \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\overset{\text{וקטור שורה}}{B_l}}_{\text{איברי השורה ה-}i\text{ ב-}A_2} (-1)^{i+l} |M_{i,l}(D)| \underset{\text{פיתוח לפי שורה } i}{=} |A_1| + |A_2|$$

מש"ל

ב) <u>החלפת שורות:</u>

$i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$|A|$$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

det(A)= 0
2 שורות פרופורציונית

det = 0
2 שורות
פרופורציוניות

det = 0
2 שורות
פרופורציוניות

<u>מסקנה</u>

החלפת שורות מכפילה את הדטרמיננטה ב (-1).

ג) הכפלת שורה בס׳ והוספתה לשורה אחרת:

$E_i^j(a)$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + A_i a \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}}_{|A|} + \begin{vmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i a \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = |A|$$

det = 0
2 שורות
פרופורציוניות

<u>שיטה לחישוב דטרמיננטה</u>

נדרג עד מטריצה משולשית, נעקוב אחר שינוי" הדטרמיננטה.

<u>דוגמא:</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - R_1 \to R_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\frac{R_2}{-2} \to R_2}{=} (-1)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-2)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{R_4 - R_2 \to R_4}{=} 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{R_4 - R_3 \to R_4}{=} 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \underbrace{(-2)}_{\text{מכפלת אלכסונים.}} = \boxed{-16}$$

משפט ללא הוכחה

לכל שתי מטריצות האת מתקיים

$$|A\cdot B| = |A|\circ|B|$$

תוצאה

אם A מטריצה הפיכה, אז קיימת A^{-1} ומתקיים ש $A\cdot A^{-1}=I$.

לכן לפי המשפט $|A|\cdot|A^{-1}| = |A\cdot A^{-1}| = |I| = 1$

מסקנה א' - $\det(A)\neq 0$ ($|A|\neq 0$)

$$\underbrace{|A^{-1}|}_{\det(A^{-1})} = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1} \rightarrow \frac{1}{\det(A)}$$

15.12.19

לינארית

מערכת אקסיומות של שדה מספרים

קבוצה בשם F (גשדה) שנסמן feild $(F, +, \cdot)$ (חיבור, כפל)

שתי פעולות $+, \cdot$ פלוס וכפל.

אקסיומות לחיבור

A1) סגירות - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x+y \in F$

A2) קיבוץ - לכל $x,y,z \in F$ מתקיים $(x+y)+z = x+(y+z)$

A3) חילוף - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x+y = y+x$

A4) קיום איבר 0 (ניטרלי ביחס לפעולה הראשונה): לכל $x \in F$ מתקיים $x+0=x$

A5) קיום איברים נגדיים - לכל $x \in F$ קיים $y \in F$ המקיים $x+y=0$

אקסיומות לכפל

m1) סגירות - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x \cdot y \in F$

m2) קיבוץ - לכל $x,y,z \in F$ מתקיים $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

m3) חילוף - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x \cdot y = y \cdot x$

m4) קיום איבר נטרלי 1 - קיים $1 \in F$ המקיים שלכל $x \in F$ מתקיים $1 \cdot x = x$

m5) קיום איברים הופכיים - לכל $x \in F \setminus \{0\}$ קיים $x' \in F$ המקיים $x \cdot x' = 1$

אקסיומה משותפת (פילוג).

D) לכל $x,y,z \in F$ מתקיים $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

משפט

איבר ה-0 הוא יחיד

הוכחה

יהיו 0_1, 0_2 איברי 0.

$$\underbrace{0_2 = 0_2 + 0_1}_{\text{כי } 0_1 \text{ איבר ה-}0} \underbrace{=}_{\text{חילוף}} \underbrace{0_1 + 0_2 = 0_1}_{\text{כי } 0_2 \text{ איבר ה-}0}$$

משפט

הניטרלי לכפל הוא יחיד.

הוכחה

יהיו $1_1, 1_2$ איברים ניטרליים:

$$1_2 \underset{\text{כי } 1_2 \text{ איבר נטרלי}}{=} 1_1 \cdot 1_2 \underset{\text{חילוף}}{=} 1_2 \cdot 1_1 \underset{\text{כי } 1_2 \text{ איבר נטרלי}}{=} 1_1$$

משפט

לכל x הנגדי הוא יחיד

הוכחה

יהיו y_1, y_2 שני נגדיים של x.

נתון $\begin{cases} x+y_1=0 \\ x+y_2=0 \end{cases}$

$$x+y_1 = x+y_2 \quad / +y_1$$

$$(x+y_1)+y_1 = (x+y_2)+y_1$$

חילוף; נגדי $x+y_1=0$

$$0+y_1 = (y_2+x)+y_1$$

קיבוץ; 0 ניטרלי

$$y_1 = y_2+(x+y_1)$$

y_1 נגדי $x+y_1=0$

$$y_1 = y_2+0$$

0 ניטרלי

$$y_1 = y_2$$

מש"ל

הערה

כיוון שהנגדי יחיד מעתה נסמן $(-x)$ הנגדי של x.

משפט

לכל $x \in F \setminus \{0\}$ ההופכי הוא יחיד.

הוכחה:

יהיו y_1, y_2 הופכיים של x.

נתון $\begin{cases} x \cdot y_1 = 1 \\ x \cdot y_2 = 1 \end{cases}$

$$x \cdot y_1 = x \cdot y_2 \quad / \cdot y_1$$

$$(x \cdot y_1) \cdot y_1 = (x \cdot y_2) \cdot y_1$$

חילוף; הופכי

$$1 \cdot y_1 = (y_2 \cdot x) \cdot y_1$$

קיבוץ; ניטרלי לכפל

$$y_1 = y_2 \cdot (x \cdot y_1)$$

הופכי

$$y_1 = y_2 \cdot 1$$

ניטרלי

$$y_1 = y_2$$

מש"ל

הערה

כיוון שההופכי יחיד לכל x נסמן אותו x^{-1}.

משפט

לכל $x\in F\setminus\{0\}$ מתקיים $(x^{-1})^{-1}=x$

הוכחה

עבור x קיים הופכי y, כך ש $x\cdot y=1$ וגם $y\cdot x=1$ (לפי חילוף).

הוכחנו ש $x=y^{-1}$ $\overset{\text{כלומר}}{\Leftarrow}$ $(x^{-1})^{-1}=x$ מש"ל.

משפט

לכל $x\in F$ מתקיים $-(-x)=x$

הוכחה

עבור x קיים נגדי y, כך ש $y+x=0$ וגם $x+y=0$.

הוכחנו ש $x=-y$ ולכן מתקיים $-(-x)=x$.

משפט אולי במיקוד.

לכל $a,b\in F$ מתקיים $\boxed{a\cdot(-b)=}\,(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$

הוכחה

$$(a\cdot b)+((-a)\cdot b)\underset{\uparrow\ \text{פילוג}}{=}(a+(-a))\cdot b\underset{\downarrow\ \text{חיבור נגדיים}}{=}0\cdot b\underset{\downarrow\ \text{מטענת עזר}}{=}0$$

ולכן $-(a\cdot b)=(-a)\cdot b$ מש"ל

טענת עזר

לכל $x\in F$ מתקיים $x\cdot 0=0$.

הוכחה

$$x\cdot 0\underset{\downarrow\ \text{0 איבר נטרלי לחיבור}}{=}x\cdot(0+0)\underset{\downarrow\ \text{פילוג}}{=}x\cdot 0+x\cdot 0 \Rightarrow x\cdot 0=x\cdot 0+x\cdot 0 \quad /+(-(x\cdot 0))$$

$$(x\cdot 0)-(x\cdot 0)=(x\cdot 0)+(x\cdot 0)-(x\cdot 0) \qquad x-x=0$$

$$0=(x\cdot 0)+0 \quad \text{נטרלי לחיבור}$$

$$0=x\cdot 0$$ מש"ל.

משפט

$(-1)\cdot(-1)=1$

הוכחה

נשתמש במשפט ש $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

נציב $a=1$, $b=-1$ נקבל

$$(-1)\cdot(-1)=-(\cancel{(-1)}\cdot 1)=-(-(1\cdot 1))=-(-(1))=1$$

$$(-1)\cdot(-1)=-(1\cdot(-1))\underset{\uparrow\ \text{1 נייטרלי לכפל}}{=}-(-1)\overset{*}{\underset{\uparrow\ \text{משפט}}{=}}1$$

מש"ל.

דוגמאות של שדות מספרים

$\mathbb{R}$ - כל ציר המספרים, $+,\circ$ פעולות רגילות. $(\sqrt{2} \in \mathbb{R})$

$\mathbb{Q}$ - כל הרציונליים $\left\{ \frac{m}{n} \mid \begin{matrix} m,n \\ \text{שלמים} \\ n \neq 0 \end{matrix} \right\}$ $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$

סגירות לכפל $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \in \mathbb{Q}$

סגירות לחיבור $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq} \in \mathbb{Q}$

שדה המספרים המרוכבים

רקע:

$x^2 + 1 = 0$ $\qquad$ $x \cdot 0 = 7$

לשתי המשוואות אין פתרון בתחום הממשיים $(\mathbb{R})$.

$x \cdot 0 = 7$ הוכחנו שאין פתרון.

ניסו להוכיח שלמשוואה $x^2+1=0$ אין פתרון ולא הצליחו.

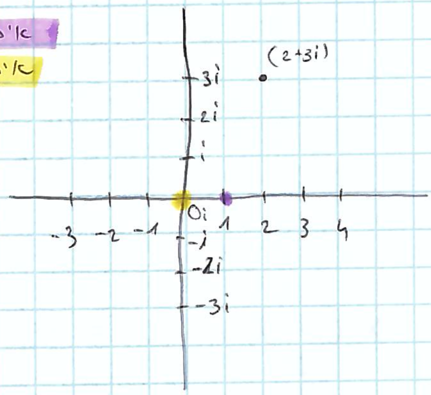
נסמן i כפתרון למשוואה $x^2+1=0$ ולכן מתקיים $(i)^2 = -1$.

המישור של גאוס

$\mathbb{C} = \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

איבר היחידה

איבר האפס



נבדוק סגירות

$x + iy \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x, y, u, v \in \mathbb{R}$

$u + iv \in \mathbb{C}$

$$(x+iy) \cdot (u+iv) \underset{\text{פילוג } D}{=} (x+iy) \cdot u + (x+iy) \cdot iv = xu + iyu + xiv + iyiv = (xu - yv) + i(yu + xv) \Rightarrow$$

$xu - yv \in \mathbb{R}$

$yu + xv \in \mathbb{R}$ $\qquad$ ולכן $\qquad$ $(xu-yv) + i(yu+xv) \in \mathbb{C}$

איבר ה-0: $0 + 0i$

נגדי של $x + iy \in \mathbb{C}$ $\leftarrow$ $(-x) + i(-y)$

$$x + iy + (-x) + i(-y) = 0 + iy + i(-y) = 0 + i(y-y) = 0 \cdot i0$$

$-x, -y \in \mathbb{R}$

קיום הופכי

$x+iy \in \mathbb{C}$ כך ש x,y לא שניהם 0 אז $x+iy = Z \neq 0+i0$.

$$(x+iy)(u+iv) = 1+0i$$

$$xu + ixv + iyu - yv = 1$$

איבר היחידה

$1+0i$. בדיקה:

$$(x+iy)(1+i0) = x + \underbrace{x\cdot i\cdot 0}_{0} + iy\cdot 1 + \underbrace{iy\cdot i\cdot 0}_{0} = x+iy$$

קיום איבר הופכי

נחפש u,v.

$$(x+iy)(u+iv) = 1+0i$$

$$xu + ixv + iyu - yv = 1$$

$$xu - yv + i(xv+yu) = 1+0i$$

צריך להתקיים

$$\begin{cases} xu - yv = 1 & /\cdot y \\ xv + yu = 0 & /\cdot x \end{cases}$$

הצבה

$$x\cdot\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + yu = 0$$

אם $y=0$ נקבל $v=0$

$$\begin{cases} \underline{yxu} - y^2 v = y \\ x^2 + \underline{xyu} = 0 \end{cases}$$

משוואה 2 פחות משוואה 1

$$x^2 + y^2 v = -y$$

$$v(x^2+y^2) = -y \qquad / \; x^2+y^2 \neq 0$$

לא שניהם 0.

$$v = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

22.12.12

לינארית

תזכורת

$\mathbb{C} = \{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$, $i^2=-1$ כאשר

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

רציונליים ממשיים מרוכבים

חישוב הופכי של מספר מרוכב

יהי $(a+ib)$ כאשר a,b לא שניהם 0.

נחפש $x,y\in\mathbb{R}$ שיקיימו $(a+ib)\cdot(x+iy)=1+0i$

אז $(ax-by)+(ay+bx)i=1+0i$ (כי $i\cdot i=-1$)

$ax-by=1$ $\qquad$ $ay+bx=0$

$$\circledast \begin{cases} ax-by=1 & /\cdot b \\ ay+bx=0 & /\cdot a \end{cases}$$

$$\begin{cases} bax-b^2y=b \\ a^2y+abx=0 \end{cases}$$

$a^2y+b^2y=-b$ נציב את y

$y(a^2+b^2)=-b \quad /:a^2+b^2$ ← כי לא שניהם 0

$$y=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$a^2\cdot\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)+abx=0$$

$$abx=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$$

נניח $a=0$ $\quad b\neq 0$

נציב במשוואות $\circledast$ ונקבל

$$\begin{cases} -by=1 \\ bx=0 & /:b \end{cases}$$

$x=0$

$y=-\frac{1}{b}$

נניח $b=0$ $\quad a\neq 0$

נציב במשוואות $\circledast$ ונקבל

$$\begin{cases} ax=1 \\ ay=0 & /:a \end{cases}$$

$y=0$

$x=\frac{1}{a}$

נניח $a,b\neq 0$

$$abx=\frac{a^2b}{a^2+b^2} \quad /:ab$$

$$x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

נשים לב כי פתרון זה כולל את שני המקרים הפרטיים.

ההופכי:

ההפכי של $a+bi$ הוא

$$\boxed{\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}i\right) \in \mathbb{C}}$$

המישור המרוכב

המשמעות הגיאומטרית של חיבור וכפל ב- $\mathbb{C}$:

נסמן $z=x+yi$ כמס' מרוכב.

חץ במישור הוא הצגה של מס' מרוכב. הוא יוצא מראשית הצירים.

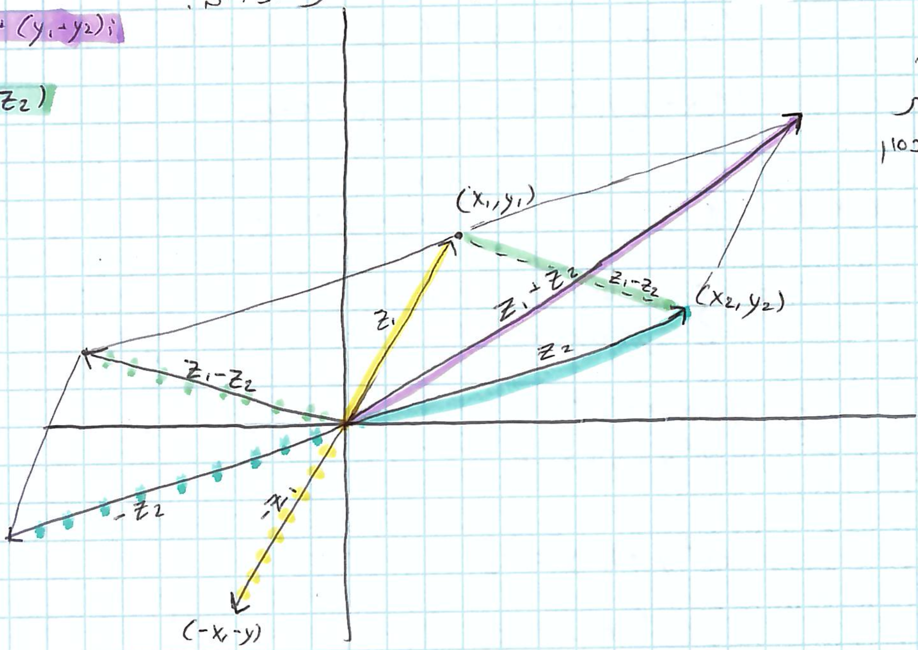
$z_1 = x_1+y_1i$

$z_2 = x_2+y_2i$

$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$

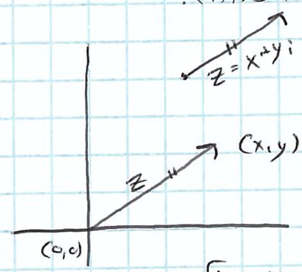
$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$

$z_1=-x-yi$



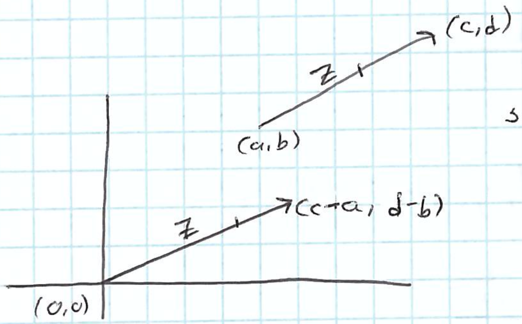
כאשר עושים חיבור מס' מרוכבים נוצרת מקבילית. כאשר האלכסון הארוך זה החיבור והקצר החיסור.

כלל (ללא הוכחה).



סתם קו, מציגים במקביל לראשית הצירים והוא נהיה מס' מרוכב כשראש חץ הוא ה x,y.

אז

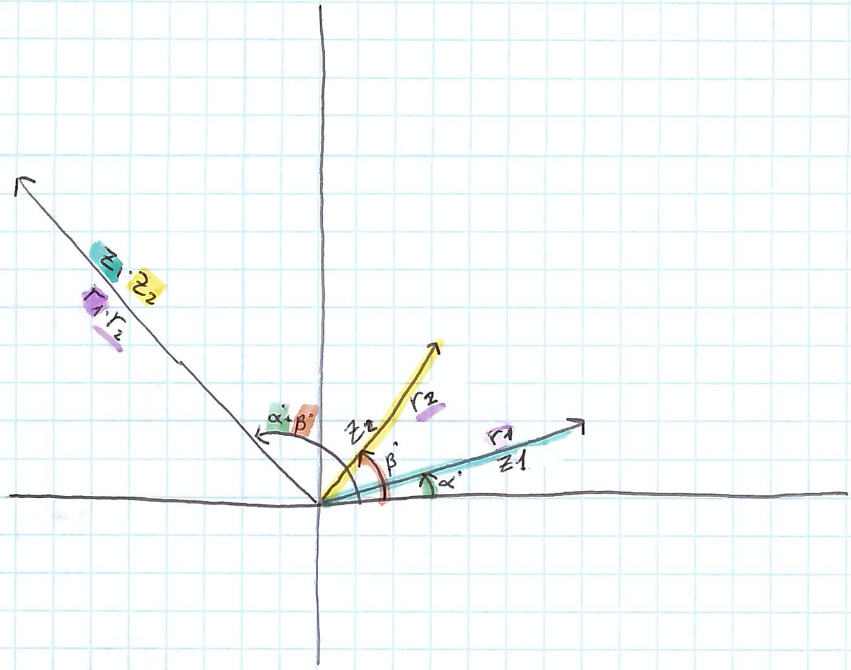


אם מציגים קו אקראי לראשית הצירים (במקביל, כך שהשיפוע לא משתנה), אנחנו יודעים למצוא אותו ע"י $(c-a, d-b)$ בעזרת הקורדינטות התחלה וסוף שלו.

משמעות גיאומטרית של כפל

$Z_1 = x_1 + y_1 i$

$Z_2 = x_2 + y_2 i$



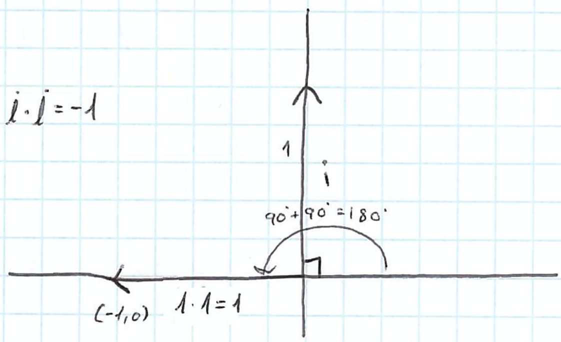
כפל מס' מרוכבים זה מס' שהזווית שלו סכום הזוויות והאורך שלו מכפלת האורכים.

הערה

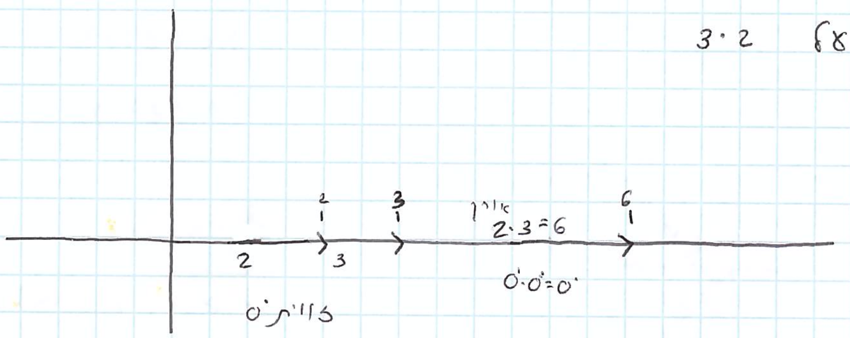
זוויות מודדים מהכיוון החיובי של ציר x נגד כיוון השעון.

דוגמאו

על $i \cdot i$.

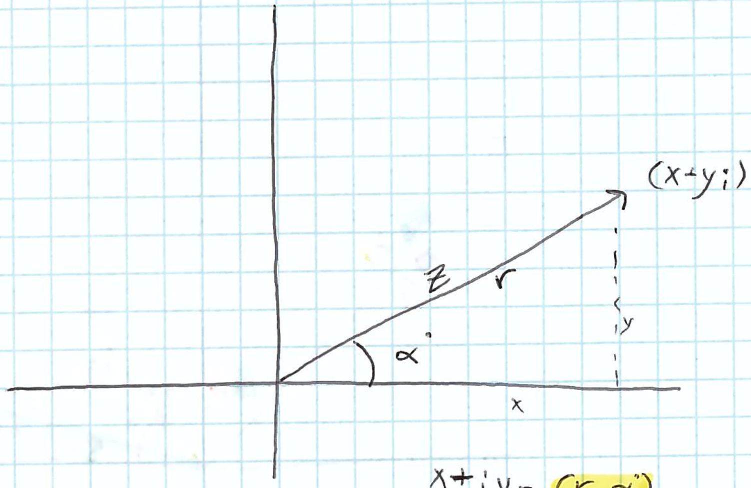


על $3 \cdot 2$



הצגה פולרית של מספר מרוכב

$x+yi$ הצגה קרטזית.



$x+iy=(r,\alpha)$

הצגה פולרית של המס.

$$\boxed{\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\alpha&=\frac{y}{x}\\ \alpha&=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}}$$

מעבר מהצגה קרטזית להצגה פולרית

לפי פיתגורס.

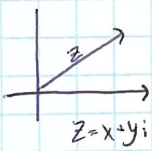
(α מסומן גם כ θ לפעמים).

$$\boxed{\begin{aligned} x&=r\cos\alpha\\ y&=r\sin\alpha\end{aligned}}$$

מעבר מקורדינטות פולריות לקורדינטות קרטזיות

הגדרה

א) $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (בעצם המרחק מראשית הצירים).

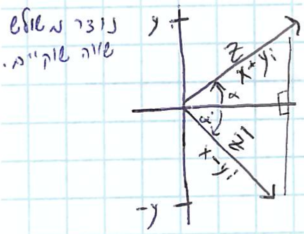


ב) החלק הממשי של z $\quad Re(z)=x$

החלק הדמיוני של z $\quad Im(z)=y$

ג) הצמוד של z: $\quad \bar{z}=x-yi$

אז בסימון פולרי: $\quad \overline{(r,\alpha)}=(r,-\alpha)$



$|z|=|\bar{z}|$

משפטים בנושא הצמוד

($\bar{\bar{z}} = z$.

הוכחה

אם $z = x + yi$

$\bar{z} = x - yi$

$\bar{\bar{z}} = x + yi$

($\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

הוכחה

אם $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

אז מתקיים $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)i$

$\bar{z}_1 = x_1 - y_1 i$

$\bar{z}_2 = x_2 - y_2 i$

$\Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i$

מש"ל

($\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

הוכחה

$z_1 = x_1 + y_1 i$ $\quad \bar{z} = x_1 - y_1 i$

$z_2 = x_2 + y_2 i$ $\quad \bar{z} = x_2 - y_2 i$

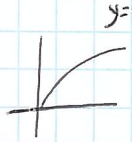
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$

$\bar{z} \cdot \bar{z} = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$

הערה

$\sqrt{4} = 2$



$\sqrt{x^2} = |x|$

(לכל $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$, ומתקיים $|z| = 0$ אם"ם $z = 0$

הוכחה

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

נניח $|z| = 0$ אז $\sqrt{x^2+y^2} = 0$ $\Leftarrow$ $x = y = 0$ $\Leftarrow$ $z = 0$

$z = 0$, $x = y = 0$ אז $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0} = 0$ מש"ל.

(5 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

הוכחה

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$z \cdot \bar{z} = (x^2+y^2) + (-xy+xy)i = x^2+y^2 = |z|^2$ מש"ל

תוצאה

אם $z \neq 0$ אז $|z| \neq 0$. נחלק את שני האגפים ב- $|z|^2$ ונקבל

$\frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \left(z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right)$ (לפי משפט 4+5)

$$\boxed{(z)^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - yi}{x^2+y^2}} \quad \left(= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i \right)$$

(6 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ אז מתקיים $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

הוכחה

נסמן $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

$|z_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $|z_2| = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$

$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} =$

$= \sqrt{(x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2) + (x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1y_2y_1x_2} + y_1^2x_2^2)}$

$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}$ "

$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{x_2^2+y_2^2} \cdot \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{(x_2^2+y_2^2)(x_1^2+y_1^2)} =$

$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2}$ " מש"ל

(7 תזוזית של כפל מס' שווה לסכום זוויות המספרים.

$z_1 = (r_1, \alpha)$, $z_2 = (r_2, \beta)$

$z_1 = r_1 \cos\alpha + (r_1 \sin\alpha)i$, $z_2 = r_2 \cos\beta + (r_2 \sin\beta)i$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cos\alpha \, r_2 \cos\beta - r_1r_2 \sin\alpha \sin\beta + (r_1r_2 \cos\alpha \sin\beta + r_1r_2 \sin\alpha \cos\beta) =$

$= r_1r_2 (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta) + (\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta)i =$

$= r_1r_2 (\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)i)$ " $\quad z_1 \cdot z_2 = (r_1r_2, \alpha+\beta)$ " מש"ל

הגדרה

$z \in \mathbb{C}$ אז $z = r(\cos\alpha + (\sin\alpha)i)$ או $z = r \cdot cis\,\alpha$

$$z = r(\underbrace{\cos\alpha + (\sin\alpha)i}_{cis\,\alpha})$$

סימון: $cis\,\alpha$

תרגילי הבהרה

פיתרון של משוואה ריבועית $az^2+bz+c=0$ כאשר $a,b,c \in \mathbb{C}$.

לדוגמא $(2+i)z^2 + (2i-3)z + 2 + 7i = 0$.

הנוסחא לפיתרון משוואה ריבועית נכונה בכל שדה (לפעמים השורש לא קיים).

הנוסחא:

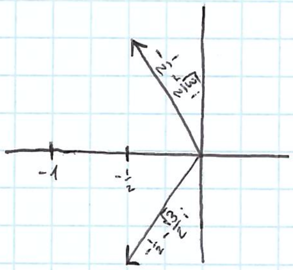
$$\boxed{z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

דוגמא

- $x^2 + x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



- $z^2 = 1+2i$

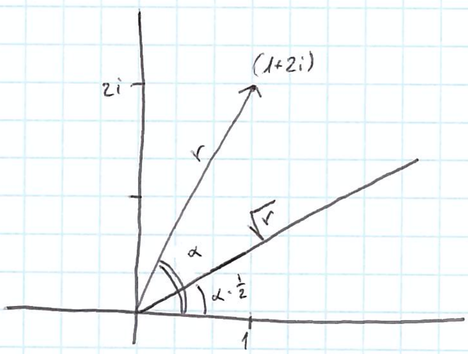
דרך א' ארוכה

נסמן: $z = x + yi$

$z^2 = x^2 - y^2 + (xy + yx)i$

$x^2 - y^2 = 1$ $\qquad$ $xy + yx = 2$

לפתור מערכת משוואות עם 2 נעלמים.



$r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\sqrt{r} = \sqrt[4]{5}$

$\tan\alpha = \frac{2}{1}$

$\alpha = 63.435°$

$\frac{\alpha}{2} = 31.72°$.

30.12.19

לינארית

מספרים מרוכבים

1) $x^2+1=0$

$x^2=-1$

$x=\pm\sqrt{-1}$

$\boxed{\text{סימון} \quad i=\sqrt{-1}}$

$x=\pm i$

מהקל

1) $x^2+9=0$

$x=-9$

$x=\pm\sqrt{-9}$

$x=\pm\sqrt{9\cdot(-1)}$

$x=\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}$

$x=\pm 3i$

3) $x^2-4x+5=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}}{2}=$$

$$=\frac{4\pm 2i}{2}= \begin{cases} \frac{4+2i}{2}=\frac{4}{2}+\frac{2i}{2}=2+i \\ \frac{4-2i}{2}=\frac{4}{2}-\frac{2i}{2}=2-i \end{cases}$$

הגדרה

מס' מרכב z הוא $z=a+bi$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$ (ממשיים) ו- $i=\sqrt{-1}$.

הערה

$i=\sqrt{-1}$, אז $i^2=(\sqrt{-1})^2\longrightarrow i^2=-1$, $i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$,

$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

5) $x^2-x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}= \begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

6) $x^3-4x^2+6x=0$

$x(x^2-4x+6)=0$

$x=0$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2}$$

$$\frac{4\pm\sqrt{8}i}{2}= \begin{cases} \frac{2+\sqrt{8}i}{2} \overset{2^2=\sqrt{4}}{=} 2+\sqrt{\frac{8}{4}}i=2+\sqrt{2}i \\ \frac{2-\sqrt{8}i}{2}=2-\sqrt{\frac{8}{4}}i=2-\sqrt{2}i \end{cases}$$

7) $x^4-1=0$

$(x^2-1)(x^2+1)=0$

$x^2=1 \qquad x^2=-1$

$x=\pm 1 \qquad x=\pm i$

או

נציב $y=x^2$

$y^2-1=0$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

$x^2-1=0 \qquad x^2+1=0$

כמו אותו הצבה.

8) $x^4+7x^2+12=0$

$y=x^2$ $\qquad 4\cdot 12$ $\quad 24$

$y^2+7y+12=0$

$y_{1,2}=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=$

$=\dfrac{-7\pm 1}{2}=\begin{cases}-4\\-3\end{cases}$

$x^2=-4 \qquad x^2=-3$

$x=\pm 2i \qquad x=\pm\sqrt{3}\,i$

חיבור המרוכבים

נתון $Z_1=a_1+b_1 i$ $\qquad Z_2=a_2+b_2 i$

אז: $Z_1+Z_2=a_1+b_1 i+a_2+b_2 i=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

הערה

a נקרא החלק הממשי, b נקרא החלק המדומה.

$\boxed{i=0+1\cdot i}$

8) $(2-2i)+(3+i)=(2+3)+(-2+1)i=5+(-1)i=5-1i$.

9) $(1-i)+(3+i)=4-0i=4$.

0) $-i-(3-i)+(i+2)=(0-i)-(3-i)+(2+i)=(-3+0i)+(2+i)=-1+i$.

1) $(6-2i)-(4+i)=2-3i$.

אפשר גם: $(6-2i)+(-4-i)=(6-4)+(-2-1)i=2\cancel{-}3i$.

הכנסת המינוס לסוגריים.

כפל במרוכבים

$i^2=-1$ ולכן $i\cdot i=-1$.

נתון $Z_1=a_1+b_1 i$, $Z_2=a_2+b_2 i$ אז:

$Z_1\cdot Z_2=(a_1+b_1 i)\cdot(a_2+b_2 i)=a_1a_2+a_1b_2 i+a_2b_1 i+b_1b_2 i^2\underset{i^2=-1}{=}(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

34) $(1-i)(2+i) = 2+i-2i+1 = 3-i$

35) $(4-i)(2-3i) = 8-12i-2i+3i^2 = (8-3)+(-12-2)i = 5-14i$

36) $(5-2i)(-2+5i) = -10+25i+4i+10 = 0+29i = 29i$

שוויון

נתון $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ אזי: $z_1=z_2$ אם״ם $a_1=a_2$ וגם $b_1=b_2$

43) $2x+yi=4+i$

$2x=4 \qquad yi=i$

$x=2 \qquad y=1$

45) $(i+1)(x+iy)=4+2i$

$(1+i)(x+iy)=4+2i$

$x+iy+xi-y=4+2i$

$(x-y)+(x+y)i=4+2i$

$\begin{cases} 4=x-y \\ 2=x+y \end{cases}$

$\begin{cases} x=4+y \\ x=2-y \end{cases}$

$4+y=2-y$

$2y=-2$

$y=-1$

$x=4-1$

$x=3$

47) $y^2-(ix)^2+(x+2y)i=5+4i$

$((y^2+0i)+(x^2+0i))+(x+2y)i=5+4i$

$(y^2+x^2)+(x+2y)i=5+4i$

$\begin{cases} y^2+x^2=5 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow x=4-2y$

$y^2+(4-2y)^2=5$

$y^2+16-16y+4y^2=5$

$5y^2-16y+11=0$

$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 11\cdot 5}}{10}=$

$\frac{16\pm\sqrt{256-220}}{10}=\frac{16\pm 6}{10}=\begin{cases} y=2.2 \\ y=1 \end{cases}$

$x_1=4-4.4$

$x_1=-0.4 \qquad (-0.4, 2.2)$

$x_2=4-2$

$x_2=2 \qquad (2,1)$

צמוד של מספר מרוכב

הגדרה

נתון $z=a+bi$ הצמוד של z הוא $\bar{z}=a-bi$

דוגמאות:

1) $z=2+3i \rightarrow \bar{z}=2-3i$

2) $z=2-5i \rightarrow \bar{z}=2+5i$

3) $z=-4+7i \rightarrow -4-7i$

4) $z=-5-10i \rightarrow \bar{z}=-5+10i$

5) $z=4i \rightarrow \bar{z}=-4i$

6) $z=-9i \rightarrow \bar{z}=9i$

7) $z=3 \rightarrow \bar{z}=3$

8) $z=-2 \rightarrow \bar{z}=-2$

ערך מוחלט של מספר מרוכב

הגדרה

נתון $z=a+bi$ אז ערך מוחלט הוא $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

$|z|$ ממשי ולא מספר מרוכב.

$$|z|^2=a^2+b^2$$

דוגמאות

1) $z=1+i \rightarrow |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

2) $z=4-3i \rightarrow |z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

3) $z=-5-12i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

משפט

נתון $z=a+bi$ אז $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

הוכחה

$z=a+bi\ ,\ \bar{z}=a-bi$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ |z|^2=a^2+b^2$

$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-abi+abi+b^2=|z|^2$

תרגיל

חשב

1) $\frac{7-8i}{5+12i}=\frac{(7-8i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)}=\frac{35-84i-40i-96}{25+144}=\frac{-61-124i}{169}=$

מכפילים מונה ומכנה בצמוד של המכנה

יוצא מספר ממשי במכנה.

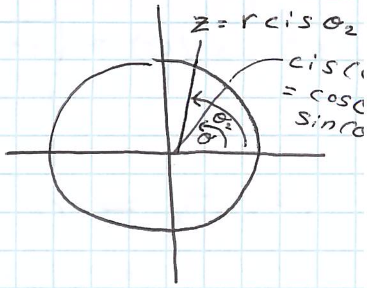
$=\frac{-61}{169}-\frac{124}{169}i$

10) $\frac{1+i}{1-3i}=\frac{(1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+4i-3}{1+9}=\frac{-2+4i}{10}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

5.1.20

לינארית

תזכורת מספרים מרוכבים



$|cis(\theta)| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$cis(90°) = \cos(90°) + \sin(90°)i = i$

$cis(180°) = \cos(180°) + \sin(180)i = -1$

$z = \underbrace{a+bi}_{\text{הצגה קרטזית}} = \underbrace{r\,(cis\,\theta_2)}_{\text{הצגה פולרית}}$ (θ - ארגומנט)

$z_1 \cdot z_2 = (r_1\,cis\,\theta_1)(r_2\,cis\,\theta_2) = r_1 \cdot r_2 \cdot cis\,\theta_1 \cdot cis\,\theta_2 =$

$= r_1 r_2\,cis(\theta_1 + \theta_2)$

מסקנה: משפט דמואבר

α מס ממשי,

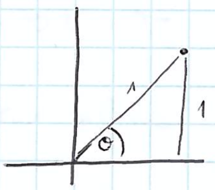
$z^{\alpha} = r^{\alpha}\,cis(\alpha \cdot \theta)$

$z = r \cdot cis\,\theta$

תרגיל

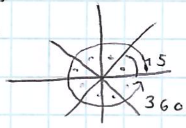
• $(1+i)^{2018} = (\sqrt{2}\,cis(45))^{2018} = (\sqrt{2})^{2018} \cdot cis(2018 \cdot 45°) =$

$8 \cdot 45° = 360°$
ככה שזה מחזורי.



$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$, $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = 45°$



$= \sqrt{2}^{2018} \cdot cis((252 \cdot 8 + 2) \cdot 45°) = \sqrt{2}^{2018} \cdot cis(252 \cdot 360° + 90°) =$

252 סיבובים
כפולים של 360
כמו רק 90°

$2018 \cdot 45 = 90,810 =$
$= 252.25 \cdot 360° =$
$252 \cdot 360° + 90°$,,

$= \sqrt{2}^{2018}\,\underbrace{cis\,90°}_{i} = 2^{\frac{1}{2} \cdot 2018} \cdot i = 2^{1009}\,i$,,

הערה: $\underset{\text{בממשי}}{\sqrt{x^2} = |x|}$,, $\underset{\text{במרוכבים}}{\sqrt{3+2i} \neq |3+2i|}$

במרוכבים לא מוגדרת הפונקציה $\sqrt{\ }$. הכוונה: מצא z המקיים $z^2 = 3+2i$ (מציאת שני השורשים.)

• $\sqrt{3+2i}$

דרך א': השיטה הקרטזית:

נסמן $z = x+yi$, נקבל $(x+yi)^2 = 3+2i \Leftarrow$

$x^2 + 2xyi - y^2 = 3+2i$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 2 \end{cases}$

פותרים ומקבלים 2 פתרונות.

דרך ב': הצגה פולרית

$Z = r \operatorname{cis}\theta$.

$\Leftarrow Z^2 = 3+2i$

$r^2 \operatorname{cis}(2\theta) = 3+2i$ — הצגה של $3+2i$ בצורה פולרית

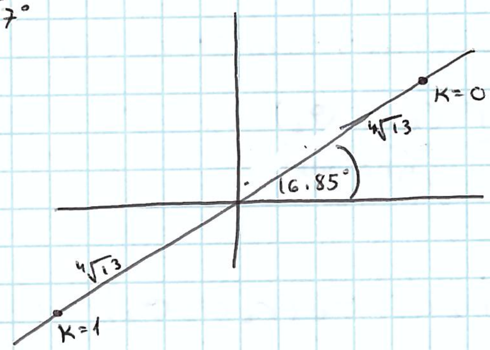
$r^2 \operatorname{cis}(2\theta) = \underbrace{\sqrt{9+4}}_{\sqrt{2^2+3^2}=r} \cdot \operatorname{cis}\underbrace{(33.7)}$

$\tan\theta = \frac{2}{3}$
$\theta = 33.7^\circ$

$r^2 = \sqrt{13} \implies r = \sqrt[4]{13}$

$2\theta = 33.7^\circ + 360^\circ k$

$\theta = 16.85^\circ + 180^\circ k$



פתרון 1: $(\sqrt[4]{13}, 16.85^\circ)$

פתרון 2: $(\sqrt[4]{13}, 196.85^\circ)$

מסקנה חשובה

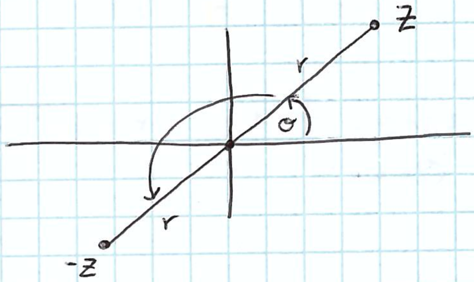
א) אם נתון $r_1 \operatorname{cis}\theta_1 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$

אזי: $r_1 = r_2$ וגם $\theta_1 = \theta_2 + 360^\circ k$

- $Z = r\operatorname{cis}\theta \; (= r(\cos\theta + \sin\theta i))$

$-Z = ?$

$-Z = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$



זו לא הצגה פולרית $\longleftarrow -r\operatorname{cis}\theta$

כי r הוא גדול מ-0.

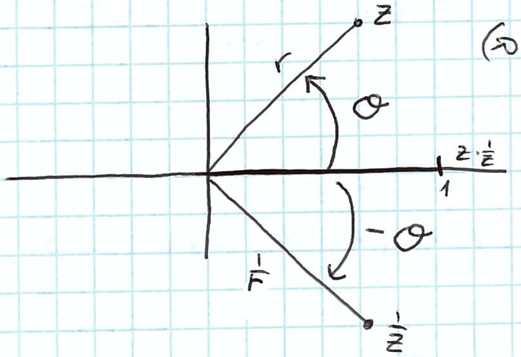
$r(\cos(\theta+180^\circ) + i\sin(\theta+180^\circ)) = r(-\cos\theta - \sin\theta\, i) = -\underbrace{r\cos\theta}_{\text{ממשי}} - \underbrace{r\sin\theta}_{\text{מדומה}}\, i$

- $\frac{1}{Z} = (Z)^{-1}$

הגדרת הופכי.

$\frac{1}{Z} \cdot Z = 1$

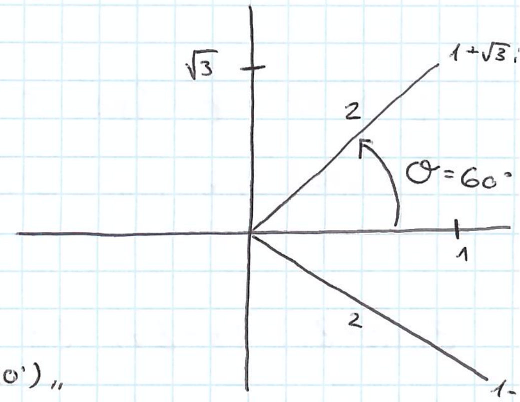
ב)



ע"פ צמוד

$(r\operatorname{cis}\theta)^{-1} = \underbrace{r^{-1}}_{\text{מכפלת הרדיוסים יהיו 1 } r\cdot\frac{1}{r}} \underbrace{\operatorname{cis}(-\theta)}_{\text{כדי שסכום הזוויות יהיה 0}}$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{2\ \mathrm{cis}(60^\circ)}{2\ \mathrm{cis}(-60^\circ)}\right)^{10} =$$



הערה

$$\frac{1}{\mathrm{cis}\,\alpha} = \underset{\text{1 רדיוס}}{1}\ \mathrm{cis}(-\alpha)$$

$$= \left[\mathrm{cis}(60^\circ-(-60^\circ))\right]^{10} =$$

$$= \left[\mathrm{cis}(120^\circ)\right]^{10} \underset{\mathrm{cis}(\alpha)^{10} = \mathrm{cis}(\alpha\cdot 10)}{=} \mathrm{cis}(1200) = \mathrm{cis}(3\cdot 360^\circ + 120^\circ) = \mathrm{cis}(120^\circ)$$

$$r = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

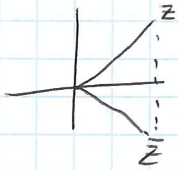
$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\underset{\text{רדיוס}}{1}\cdot \mathrm{cis}(120^\circ) = \cos(120^\circ) + \sin(120^\circ)i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z^3 = -\bar{z}$ נסמן: $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$,

$$r^3\,\mathrm{cis}\,3\theta = -(\overline{r\,\mathrm{cis}\theta}) \underset{r\,\mathrm{cis}(-\theta)=\bar{z}}{=} -r\,\mathrm{cis}(-\theta) \underset{\text{נציג כ-}\mathrm{cis}\ 180^\circ+}{=} r(\mathrm{cis}(180^\circ-\theta))$$



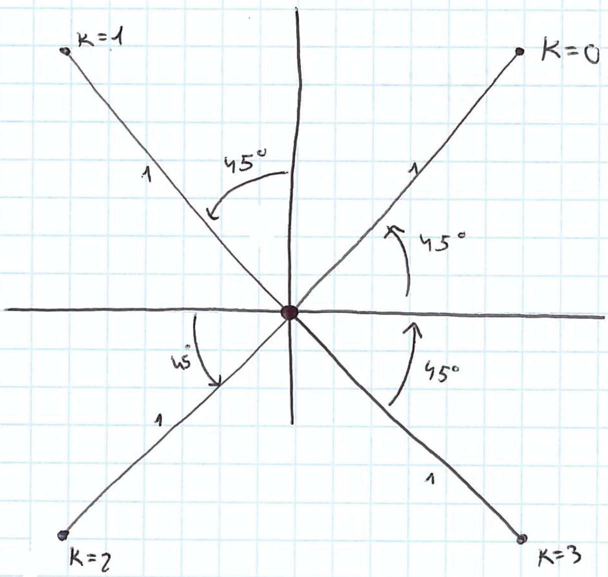
$$\begin{cases} r^3 = r \\ 3\theta = 180^\circ - \theta + 360^\circ k \end{cases}$$

$r^3 = r \ (\Rightarrow (r^3 - r) = 0 \Rightarrow r(r^2-1) = 0)$

$r = 0$, $r^2 = 1$, $r = 1$

$4\theta = 180^\circ + 360^\circ k$

$\theta = 45^\circ + 90^\circ k$



5 פתרונות:

בדיקה מדגמית:

$K=1$

$z = 1\,\mathrm{cis}\,135^\circ$

$z^3 = 1\cdot\mathrm{cis}(3\cdot 135^\circ) = \mathrm{cis}(405^\circ) = \mathrm{cis}(45^\circ)$

$-\bar{z} = 1\,\mathrm{cis}(45^\circ)$

הערה חשובה

המשפט היסודי של האלגברה טוען, למשוואה ממעלה n מעל $\mathbb{C}$ יש בדיוק n פתרונות אולי שווים. כלומר, ביטוי ממעלה n ניתן לפרק אותו לגורמים ליניאריים כדוגמא:

$$Z_0(x-Z_1)\cdot(x-Z_2)\cdot(x-Z_3)\cdot\ldots\cdot(x-Z_n)=0$$

פתרון:

$$z^2+(2i-3)z+5-i=0$$

$$Z_{1,2}=\frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4\cdot1\cdot(5-i)}}{2}$$

$$=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{(-4-12i+9)-20+4i}}{2}$$

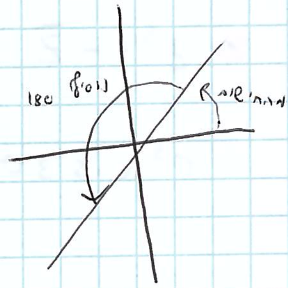
$$=\frac{(3-2i)\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$

חישוב בצד

$\sqrt{-15-8i}$

$r=\sqrt{(-15)^2+(-8)^2}=17$

$\tan\theta=\frac{-8}{-15}$



$\theta=28.07^\circ+180^\circ=208^\circ$

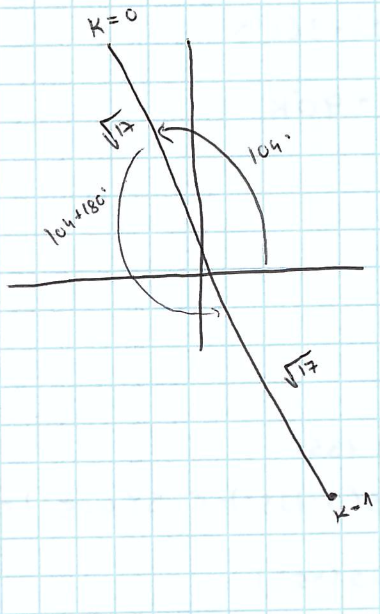
השורשים הם:

$z^2=17\,cis\,208^\circ \Rightarrow$

$z=(17\,cis\,208)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$z=17^{\frac{1}{2}}(cis^{\frac{1}{2}}(208+360k)) \Rightarrow cis(\frac{1}{2}\cdot(208+360))$

$z=\sqrt{17}\;cis\,(104+180k^\circ)$



$$=\frac{(3-2i)+\sqrt{17}\cdot(\cos104+\sin104\,i)}{2}$$ ✓

$$=\frac{(3-2i)+\sqrt{17}(\cos284^\circ+\sin284\,i)}{2}$$

$z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} = 3+2i$

$a^2+b^2+2bi = 3+2i$

$$\begin{cases} a^2+b^2=3 \\ 2b=2 \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

$a^2=2$ $\qquad \sqrt{2}+i=z_1$

$a=\pm\sqrt{2}$ $\qquad -\sqrt{2}+i=z_2$

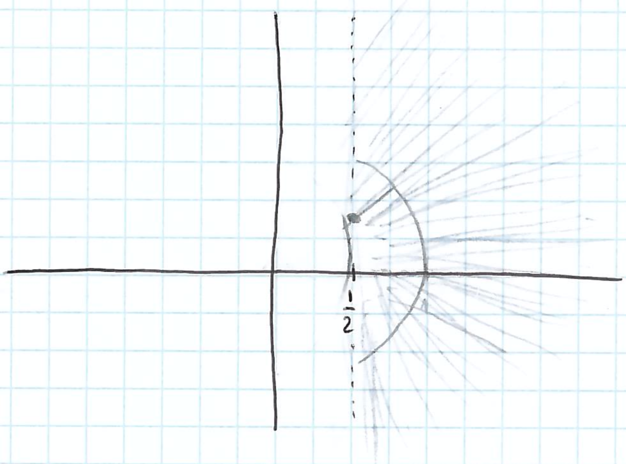
נסמן $z=a+bi$

$\bar{z}=a-bi$

$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a\,a+b\cdot b=$

$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=+2bi$

$\{z \mid \underset{(Re(z))}{Real(z)} \geq \frac{1}{2}\}$



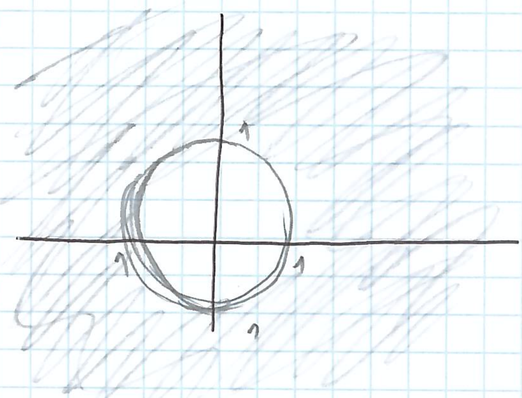
תארו בצורה גיאומטרית במישור כך ש:

הערה: $z=a+bi$

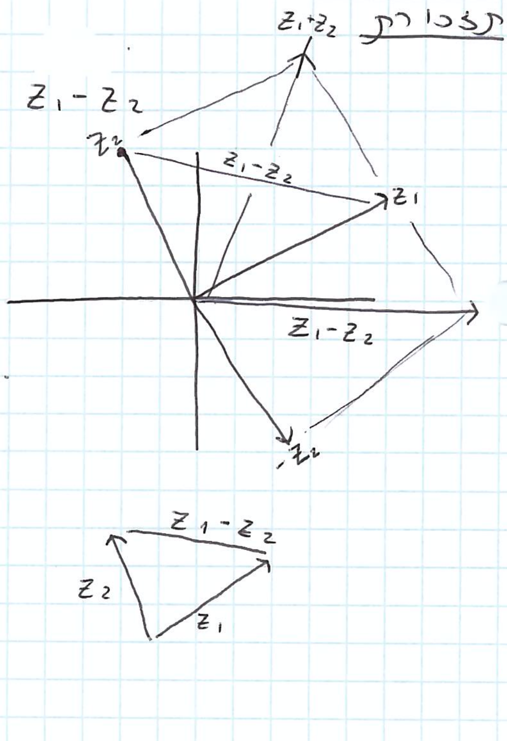
$Re(z)=a$

$Im(z)=bi$

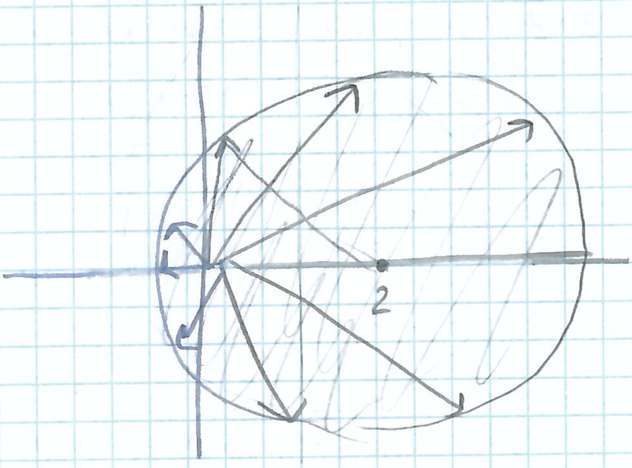
$\{z \mid |z|>1\}$ $\qquad |z|=\sqrt{a^2+b^2}$



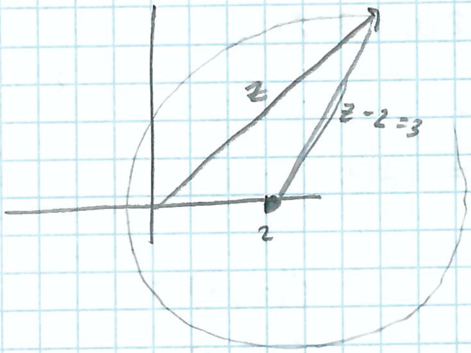
תזכורת



$\{z \mid |z-2|=3\}$



דוגמא יחידה.



12.1.20

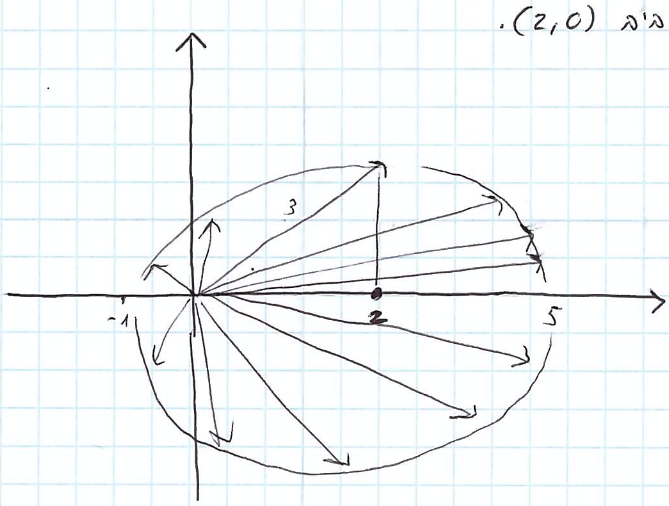
לינארית

מספרים מרוכבים - סיום

תזכורת

) הצג באיור את הקבוצה הבאה: $\{z \mid |z-2|=3\}$

מעגל ברדיוס 3 סביב (2,0).

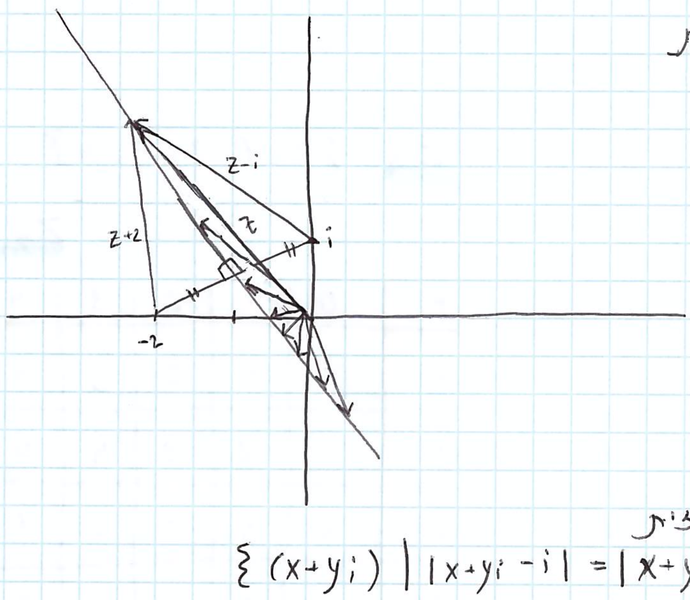


המשך

) הצג באיור $\{z \mid |z-i|=|z+2|\}$

$z-(-2)$

<u>דרך א'</u> - הצגה גיאומטרית



<u>דרך ב'</u> - הצגה קרטזית

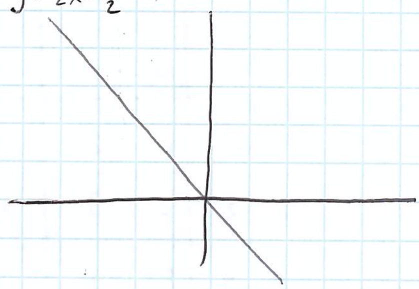
נסמן $z=x+yi$ $\{(x+yi) \mid |x+yi-i|=|x+yi+2|\}$

$$\{(x+yi) \mid |x+(y-1)i|=|(x+2)+yi|\}=\{(x+yi) \mid \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\}=$$

$$=\{(x+yi) \mid \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}\}=\{(x+yi) \mid -2y+1=4x+4\}=$$

$$\{(x+yi) \mid 2y+4x+3=0\} \longrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$$

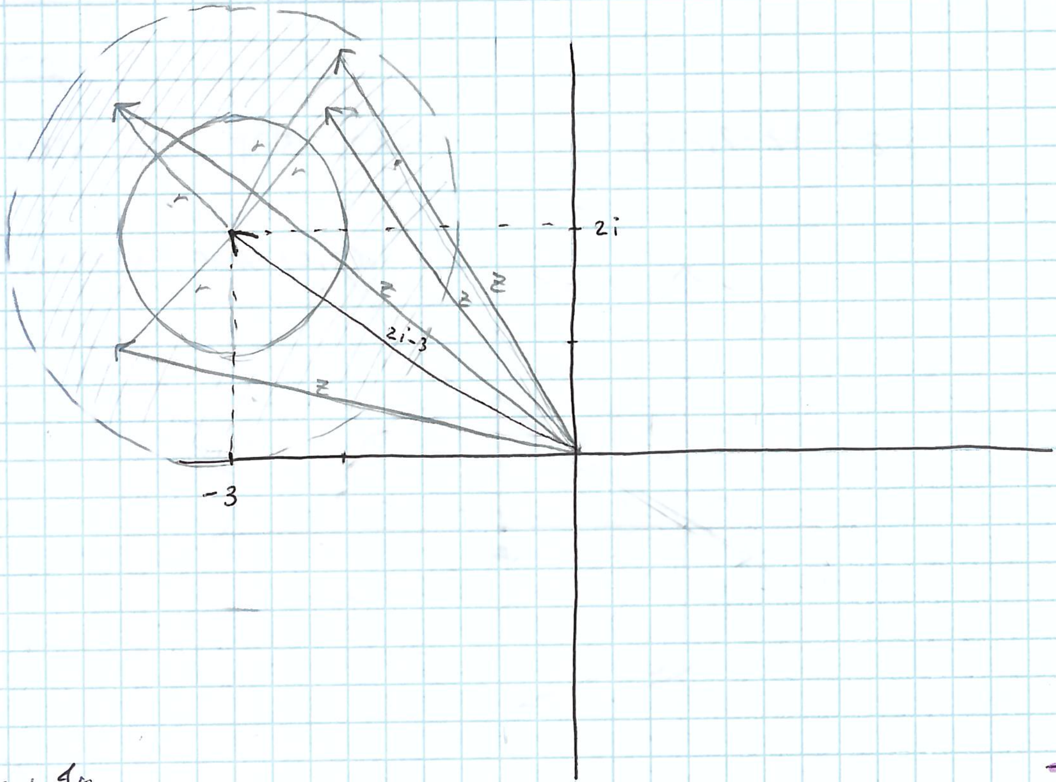
$y=-2x-\frac{3}{2}$



ה) הצג באיור

$\{z \mid 1 \le |z+3-2i| < 2\}$

$r = |z-(2i-3)|$



סוף מס' מרוכבים

$\mathbb{Z}_p$

שדה השאריות בחלוקה ב-p

(p מס ראשוני).

דוגמא:

$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

הגדרת חיבור על $\mathbb{Z}_5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

הגדרת כפל על $\mathbb{Z}_5$

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

דוגמאות לבדיקת קיום 11 האקסיומות

קיבוציות הכפל:

$$(3\cdot4)\cdot2 \stackrel{?}{=} 3\cdot(4\cdot2)$$

$$(3\cdot4)\cdot2 = 2\cdot2 = 4$$

$$3\cdot(4\cdot2) = 3\cdot3 = 4$$

פילוג:

$$(3+2)\cdot3 \stackrel{?}{=} 3\cdot3+2\cdot3$$

$$(3+2)\cdot3 = 0\cdot3 = 0$$

$$3\cdot3+2\cdot3 = 4+1 = 0$$

קיום נגדי:

$(-2) = 3$ $\qquad$ $(-3) = 2$

$3+2 = 0$ $\qquad$ $2+3 = 0$

קיום הפכיים:

$2^{-1} = 3$ $\qquad$ $4^{-1} = 4$

$3\cdot2 = 1$ $\qquad$ $4\cdot4 = 1$

Z_n - כאשר $n=12$.

Z_{12} משפט

$a\cdot b=0 \iff a=0$, $b=0$.

נחפש הופכי ל-2:

$2^{-1} = ?$

$2\cdot X=1$ לא קיים X ב- Z_{12}. ולכן n חייב להיות ראשוני.

בשדה Z_5

דרך א'
$$1\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} = 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} = 1+3^{-1}+4^{-1} = 1+2+4 = 2.$$

דרך ב'
$$1\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} = \frac{4}{3}+\frac{1}{4} = \frac{4\cdot4+4\cdot1}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 4\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot2^{-1} = 4\cdot3 = 2.$$

$$2\tfrac{2}{3} = 2+\tfrac{2}{3} = 2+(2\cdot3^{-1}) = 2+(2\cdot2) = 2+4 = 1.$$

נתונה המשוואה:

$x^2+x+2=0$

$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot2}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{1+2}}{2} =$ אין פתרון!

$x^2=3$

אין x שמקיים אותה.

למשוואה $x^2+x+2=0$

ב- $\mathbb{Z}_5$ אין פתרון

ב- $\mathbb{Q}$ אין פתרון

ב- $\mathbb{R}$ אין פתרון

ב- $\mathbb{C}$ יש פתרון: $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$, $\frac{-1}{2}i-\frac{\sqrt{7}}{2}i$

ב- $\mathbb{Z}_7$ יש פתרון $x=3$, $x=-\frac{1}{2}=3$

כי $x^2+x+2=1(x-x_1)(x-x_2) \Rightarrow x^2+x+2=(x-3)(x-3)$

$x^2-3x-3x+2$

$x^2+4x+4x+2$

x^2+x+2

נתונה המשוואה: $x^2+1=0$

ב- $\mathbb{Q}$ אין פתרון

ב- $\mathbb{R}$ אין פתרון

ב- $\mathbb{C}$ יש פתרון: $x=i,-i$

ב- $\mathbb{Z}_5$ $x=2$, $x=3$ (כי $-2=3$)

ב- $\mathbb{Z}_7$ אין פתרון.

נתונה המשוואה: $x^2-2=0$

ב- $\mathbb{Q}$ אין פתרון.

ב- $\mathbb{R}$ יש פתרון $x=\pm\sqrt{2}$

ב- $\mathbb{C}$ יש פתרון $x=\pm\sqrt{2}$

ב- $\mathbb{Z}_5$

ב- $\mathbb{Z}_7$ יש פתרון $x=4$, $x=3$ (כי $-3=4$)

נפתור את המערכת משוואות הבאה ב- Z_5 :

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1 \end{array} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right) \underset{=}{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{=}{R_1-2R_2}$$

Z משתנה חופשי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 4 - 4z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 + 4z \\ y = 4 + z \end{array}$$

<u>שאלה</u>

פתרו בעזרת שיטת קרמר (מעל $\mathbb{C}$):

$$(1+i)x + (1-i)y = 1+i \qquad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$(1-i)x + (1+i)y = 1+3i$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2 - (1-i)^2 = (1+i-1+i)(2) = 4i$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+3i & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2 - (1-i)(1+3i) = \cancel{1}+2i-\cancel{1}-(1+3i-i+3) = -4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & 1+3i \end{vmatrix} = (1+i)(1+3i)-(1+i)(1-i) = 1+3i+i-3-(1-\cancel{i}+\cancel{i}+1) = 4i-4$$

$$x = \frac{-4}{4i} = -\frac{1}{i} = \frac{-i}{1} = i$$

$$y = \frac{4i-4}{4i} = \frac{i-1}{i} = \frac{-1-i}{-1} = i+1 = y$$